# Introducción a la programación lineal.

*Por: Wilberto Sabillón.*

La programación lineal es una técnica matemática que busca resolver problemas de planificación. Principalmente ayuda a tomar decisiones de asignación de recursos (es decir problemas de maximización o minimización).

Optimización lineal o programación lineal (LP) es un método matemático para determinar la forma de lograr el mejor resultado en un modelo con varios requisitos (restricciones) que tienen una relación lineal.

Wikipedia la define como:

> La Programación Lineal es un procedimiento o algoritmo matemático mediante el cual se resuelve un problema indeterminado, formulado a través de ecuaciones lineales, optimizando la función objetivo, también lineal.
> Consiste en optimizar (minimizar o maximizar) una función lineal, denominada función objetivo, de tal forma que las variables de dicha función estén sujetas a una serie de restricciones que expresamos mediante un sistema de inecuaciones lineales.

## Requerimientos de un problema de programación lineal.

**Primera propiedad**: Los problemas buscan maximizar o minimizar alguna cantidad, por lo general la utilidad o costo. Se conoce esta propiedad como la **función objetivo** de un problema de PL.

**Segunda propiedad**: Las **restricciones** limitan el grado al cual el objetivo puede ser alcanzado.

**Tercera propiedad**: Debe haber **alternativas** disponibles para alcanzar el objetivo.

**Cuarta propiedad**: Las relaciones matemáticas (función objetivo y las restricciones), expresadas en ecuaciones y/o desigualdades, **son lineales**.

## Supuestos básicos de programación lineal.

**Certeza:** se conoce con certeza los números en el objetivo y restricciones y no cambian durante el periodo que se está estudiando.

**Proporcionalidad**: Se supone existe proporcionalidad entre el objetivo y las restricciones. Esto significa que si la producción de 1 unidad de un producto utiliza 3 horas de un recurso particular escaso, entonces producir 10 de este producto utiliza 30 horas del recurso.

**Aditividad**: El total de todas las actividades es igual a la suma de las actividades individuales.

**Divisibilidad**: Las soluciones no tienen que ser números (enteros). En su lugar, son divisibles y pueden tomar cualquier valor fraccionario. Este supuesto depende del tipo de problema en estudio. Si este no admite, valores fraccionarios, estamos ante un problema de programación entera.

**No negatividad**: Se supone que todas las respuestas o variables son no negativas. No se puede producir un número negativo de sillas.

## Formulación de problemas de programación lineal.

La formulación de un programa lineal implica desarrollar un modelo matemático para representar al problema. Por lo tanto, es necesario entender a cabalidad el problema a resolver. Una vez que éste se entiende, los pasos para formular un programa lineal son los siguientes:

1. Entender por completo el problema que se enfrenta.
2. Identificar los objetivos y las restricciones (de ser posible resumir los datos del problema).
3. Definir las variables de decisión.
4. Utilizar las variables de decisión para escribir las expresiones matemáticas de la función objetivo y de las restricciones.

Pero la formulación del problema es sólo el primer paso, luego hay que resolverlo. Existen varios formas para obtener la solución al problema. Desde, métodos gráficos hasta la utilización de programas de computadora. La solución gráfica, es la forma más fácil de resolver problemas de programación lineal; siempre y cuando sólo se consideran dos variables de decisión en el problema. Además, permite observar de manera visual y resumida lo que la técnica de la programación lineal busca y por lo tanto es de gran ayuda para comprender como funcionan algunos de los métodos mas complejos.

## Solución gráfica de un problema de programación lineal.

Gráficamente, se puede obtener la solución mediante al menos dos métodos: el de los puntos de equina y el de lineas de isoutilidad o isocosto. Ambos son parecidos y comparten gran parte del procedimiento; difieren únicamente en los pasos finales. A continuación, se describen estos dos métodos.

Una vez que se ha analizado, comprendido y formulado el problema; es decir cuando ya se tienen la función objetivo y las restricciones expresadas en términos matemáticos (es decir cuando ya se tiene el problema modelado), se procede a identificar un conjunto o región de soluciones factibles. Esto se logra trazando cada una de las restricciones del problema en una gráfica.

Como se recordará, de acuerdo con el álgebra elemental una ecuación lineal con dos variables es una línea recta. La forma más fácil de trazarla es encontrar dos puntos cualesquiera que satisfagan la ecuación; para acto seguido trazar una línea recta a través de ellos (es decir unir estos dos puntos con una línea recta). Por regla general (y por conveniencia ya que probablemente estos puntos sean esquinas de la región factible) se encuentran los puntos en los cuales las líneas cortan los ejes horizontal y vertical (normalmente llamados interceptos en X y en Y). Para esto decimos que una variable vale cero y encontramos el valor de la otra variable despejando la ecuación de la restricción; luego repetimos el proceso igualando a cero la otra variable. Hacemos esto mismo para las otras restricciones.

En algunas ocasiones las restricciones sólo afectan una variable, en estos casos la recta será una paralela al eje vertical o paralela al eje horizontal, dependiendo a la variable que afecten. La recta será paralela al eje de la variable que no aparece en dicha restricción.

Hasta ahora sólo hemos trazado líneas rectas, es decir sólo hemos graficado ecuaciones lineales; pero las restricciones normalmente se expresan como desigualdades. Por lo tanto nos resta definir cuál de las dos regiones (de nuestra gráfica) en las que parten cada una de la restricciones hacen verdadera la desigualdad. Basta con observar el signo de la desigualdad, si las variables están a la izquierda de < o de ≤, entonces la parte que hace verdadera la desigualdad está a la izquierda/abajo de la recta que representa la restricción. Si el signo es > o ≥ (y las variables siempre están a la izquierda), la región solución esta a la derecha/arriba de la recta que representa la restricción.

Otra forma de saber cual de las dos partes en que la restricción divide la gráfica es la que hace verdadera la desigualdad, basta con probar cualquier punto en el plano y observar si en esa parte de la gráfica se cumple la desigualdad, si es así todos los puntos de esa parte también satisfacen la restricción; sino la zona que nos interesa es la del otro extremo de la gráfica.

Cuando hemos terminado de graficar las desigualdades, el área que satisface todas las restricciones se conoce como región factible o región solución. Todos los puntos dentro de esta región son las soluciones alternativas a las que hace referencia la tercera propiedad; es decir cualquier combinación de las variables de decisión que ubiquen un punto dentro de esta región factible son una posible solución para el problema.

Nota: Sin importar la forma que utilizamos para determinar el área de la desigualdad que nos interesa, sugiero colorear dicha región y repetir esto para todas las restricciones utilizando un color diferente para cada restricción. Ya que al terminar de colorear, la región factible o solución, sería el área que contendría todos los colores.

Sin embargo, todavía no sabemos cual es la respuesta o respuestas que maximizan o minimizan nuestro problema. Para ello, como se explico anteriormente, existen dos técnicas o métodos: mediante curvas de isoutilidad (o isocosto en el caso de minimización) y el método de los puntos de esquina (abreviado a método de las esquinas).

*El método de isoutilidad* se basa en que las pendientes de curvas paralelas son iguales; se parte igualando la función objetivo a un numero cualquiera (normalmente bajo, pero mayor que cero); luego se gráfica esta función objetivo. Es decir, por ejemplo si nuestra función objetivo es: Max. $Z = 2x + 3y$

Podemos hacer que el valor de Z sea 50 (en realidad el valor a utilizar no importa); puede incluso ocurrir que la gráfica de la función objetivo resultante no pase o no toque a la región factible. Sin embargo, la solución óptima será una función objetivo cuya gráfica sea paralela a esta y que además tocara a la región solución en un punto extremo a la derecha/arriba en el caso de la maximización y a la izquierda/abajo en el caso de la minimización.

Volviendo al ejemplo, se procede a graficar esta función objetivo de $50 = 2x + 3y$ (recuerden que el método más fácil para trazar un recta es mediante los interceptos); para encontrar la solución óptima trazamos rectas paralelas a esta función objetivo buscando el punto más a la derecha/arriba que toque a una de estas rectas paralelas si el problema es de maximización y el punto más a la izquierda si es de minimización. Alternativamente se puede solo desplazar la regla, siempre en sentido paralelo a la gráfica de esta función objetivo y también buscando la derecha/arriba de la región factible si el problema es de maximización y la izquierda/abajo si es de minimización. La solución óptima corresponde al punto mas extremo de la región factible y solo resta encontrar los valores de las variables de decisión y de la función objetivo en ese punto. Esto se puede inferir de la gráfica (si esta esta legible y en una buena escala) o se pueden buscar mediante procedimientos matemáticos. Encontrar el valor de la función objetivo, en este contexto, es como solucionar sistemas de ecuaciones lineales en dos variables (para obtener los valores de las variables de decisión) y luego sustituir los valores encontrados en la función objetivo para encontrar el valor del punto máximo/mínimo.

*El método de las esquinas*, consiste en encontrar la utilidad en cada esquina, es decir el valor de la función objetivo en cada esquina; la teoría de la programación lineal dice que la solución se encontrará en una esquina. La que genere un mayor valor en la función objetivo, para el caso de la maximización o menor valor en el caso de la minimización.

Para encontrar los valores de Z necesitamos conocer los valores de las variables de decisión, por lo tanto es posible que se necesite igualar las restricciones para encontrar los valores de las variables que nos brindaran el valor de Z en esa esquina. Algunas veces esto implica utilizar alguna técnica para resolver sistemas de ecuaciones lineales en dos variables. En clase vimos el de reducción y el de sustitución. En la sección de enlaces encontrarán un par de sitios que explican con mucho detalle estos y otros métodos de resolución de ecuaciones lineales.

## <u>Pasos para resolver problemas de PL utilizando el método gráfico.</u>

1. Analizar el problema hasta entenderlo.
2. Ordenar y resumir los datos numéricos.
3. Elaborar la tablita resumen.
4. Encontrar los interceptos de las restricciones para graficarlas.
5. Determinar el área solución observando los signos de cada una de las restricciones.
6. El área factible o solución, es la parte de nuestra gráfica que satisface todas las restricciones.
7. Mediante el método de las esquinas buscar la solución óptima a nuestro problema. Si el problema es de maximización la solución óptima será la esquina que nos dé el mayor valor de Z. En el caso de minimización, será la esquina que nos dé el menor valor de Z.
8. Para encontrar los valores de Z necesitamos conocer los valores de las variables de decisión, por lo tanto es posible que se necesite igualar las restricciones para encontrar los valores de las variables que nos brindaran el valor de Z en esa esquina.

Continuara...

## Recursos y Enlaces.

Libro utilizado:
Métodos cuantitativos para los negocios.
Novena Edición.
Por: Barry Render, Ralph M. Stair, Jr. y Michael E. Hanna.