UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE HONDURAS

CENTRO UNIVERSITARIO REGIONAL DEL LITORAL ATLANTICO

CARRERA DE ECONOMIA AGRICOLA

MANUAL DIDACTICO

DE

ECONOMIA MATEMATICA

EA-210

ACTUALIZADO POR:

LIC. WILBERTO A. SABILLON R.

BASADO EN OBRA ORIGINAL DE:

LIC. GERMAN R. SARMIENTO ANTUNEZ

LA CEIBA, ATLANTIDA HONDURAS C.A.

Tabla de Contenido

1. Aplicaciones de las Funciones a la Economía

1.1. Introducción a la Economía Matemática.

Es una rama de la ciencia económica que utiliza la lógica matemática y sus herramientas para estudiar y analizar hechos económicos.

Importancia de la Economía Matemática.

Las matemáticas y la economía son disciplinas complementarias dado que la mayoría de las ramas de la economía moderna utilizan matemáticas, y algunas partes importantes de la investigación matemática han sido motivadas por problemas económicos. A tal grado que muchos economistas han comprobado que las matemáticas les permiten mejorar su productividad y a su vez, muchos matemáticos han descubierto que la economía les proporciona áreas de interés para la aplicación de sus conocimientos.

Un gran economista tiene que llegar a mucho en diversas direcciones y debe combinar facultades naturales que no siempre se encuentran reunidas en un mismo individuo: debe ser matemático, historiador, conocedor de la política y la filosofía, debe dominar el lenguaje científico, expresarse y hacerse entender en lo vulgar (es decir lenguaje común), contemplar lo particular en términos de lo general y tocar lo abstracto y concreto con la misma altura.

1.2. Apuntes sobre Funciones Lineales.

En geometría y álgebra elemental, una función lineal es una función polinómica de primer grado; es decir, una función cuya representación en el plano cartesiano es una línea recta. Esta función se puede escribir como:

$f(x) = mx + b \quad \text{ó} \quad y = mx + b$

Donde m y b son constantes reales y x es una variable real. La constante m es la pendiente de la recta, y b es el punto de corte de la recta con el eje y (también conocido como intercepto en y). Si se modifica m entonces se modifica la inclinación de la recta, y si se modifica b, entonces la línea se desplazará hacia arriba o hacia abajo (del eje y) en el plano cartesiano.

Algunos datos adicionales sobre Funciones Lineales:

- Su dominio son todos los números reales, y su rango también todos los números reales.
- Su gráfica en el plano cartesiano es una linea recta.
- Si $m \neq 0$, la gráfica presentara dos interceptos (uno en x y otro en y).
- Si $m = 0$, la gráfica será un recta paralela al eje x, cruzando al eje y en b.
- Si se conoce m y b, es muy fácil inferir la función y/o la gráfica.
- También es posible encontrar la función y/o la gráfica si se conoce m y un punto cualquiera de la gráfica.
- Adicionalmente, se puede generar la función y/o elaborar la gráfica, si solo se conocen dos puntos cualesquiera de la gráfica.

La pendiente (m), se calcula en base a dos puntos de la recta. Como se muestra a continuación:

Pendiente de una Recta.

La pendiente (m) de una recta $y = f(x)$ es una razón promedio de cambio de y respecto a un cambio en x. Así:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Una vez calculada la pendiente, se puede utilizar la siguiente formula para inferir la ecuación de la recta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Sistema Lineal de Dos Ecuaciones con Dos Incógnitas.

Un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas es un sistema lineal de ecuaciones formado por sólo dos ecuaciones que admite un tratamiento particularmente simple, junto con el caso trivial de una ecuación lineal con una única incógnita, es el caso más sencillo posible de sistemas de ecuaciones, y que permiten su resolución empleando técnicas básicas del álgebra. En base a las posibles soluciones de este tipo de sistemas se clasifican en: sistemas compatibles determinados, sistemas compatibles indeterminados y sistemas incompatibles. Es decir, que el sistema tenga una única respuesta (un punto del plano cartesiano, representado por dos valores uno de x y otro de y), que el sistema no tenga respuesta (las rectas no se cruzan) y que existan infinitas soluciones.

Métodos de resolución.

Podemos diferenciar dos tipos de métodos de resolución de sistemas de ecuaciones, los básicos, en los cuales se realizan operaciones algebraicas encaminadas a despejar el valor de cada una de las incógnitas. Y los avanzados, basados en propiedades que presentan los sistemas y que determinan los distintos valores de las incógnitas que conforman las ecuaciones del sistema.

Dentro de los métodos básicos, están: *el de reducción, igualación y sustitución* en los cuales mediante distintas operaciones algebraicas se despeja el valor de x y luego el de y del sistema. Si el sistema fuera incompatible o compatible indeterminado los métodos anteriores no conducen a una solución del sistema. Entre los métodos avanzados están Regla de Cramer, la Eliminación de Gauss-Jordan, y mediante la Matriz invertible (o matriz inversa), entre otros.

1.3. Aplicaciones de las Funciones Lineales.

1.3.1. Leyes de La Oferta y La Demanda.

Oferta:

Se define como aquella cantidad de bienes o servicios que los productores están dispuestos a vender a los distintos precios del mercado. Una relación de Oferta lineal es de la forma: $p = mx + b$

Donde: p es el precio del producto; x la cantidad ofrecida; b precio al que no se ofrece el producto y m un cambio del precio respecto a un cambio en la cantidad ofrecida.

Características:

- $m > 0$
- Es una relación directa; es decir que un aumento de precio provoca un aumento en la cantidad ofrecida y viceversa.
- La gráfica se llama curva de Oferta.

Ejemplo: Dada la ecuación lineal de oferta: $5p - 4x = 20$

Se pide:

a.) Determinar el precio cuando se ofrecen 5 unidades

b.) Determinar el cambio del precio respecto a la cantidad ofrecida

c.) ¿Qué cantidad se ofrecería a un precio de L. 12.00?

d.) ¿A qué precio no se ofrecería el producto?

e.) Graficar la curva

Solución:

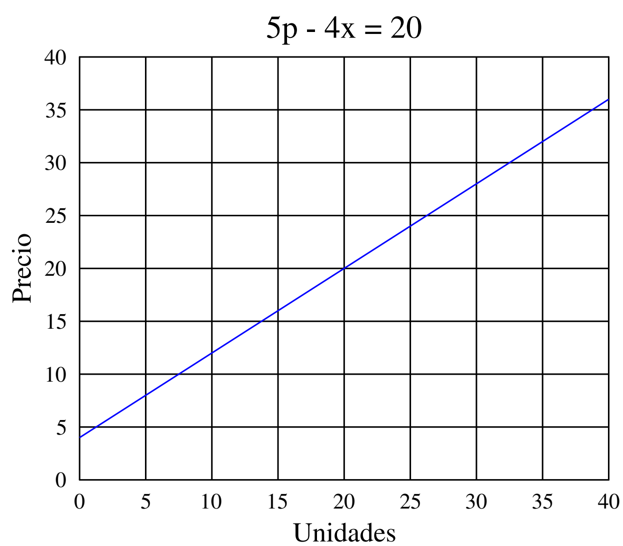
a.) $5p - 4(5) = 20$
$5p = 20 + 20$
$p =$ L. 8.00

b.) $5p = 4x + 20$
$p = \frac{4}{5}x + 4$ y por tanto $m = \frac{4}{5}$

c.) $5(12) - 20 = 4x$
$4x = 60 - 20$
$x = 10$ *unidades*

d.) Si $x = 0$
$5p - 4(0) = 20$
$p = L.\ 4.00$

e.)



Ejemplo: La función $5p - 6x = 50$ representa la oferta de un artículo determinado.

a.) Obtener el precio si la cantidad ofrecida es: 5 y 10 unidades respectivamente.

b.) Obtener la cantidad ofrecida si el precio es: L. 16.00 y L. 28.00

c.) ¿A qué precio no se ofrece el producto?

d.) Graficar la curva.

Demanda.

Se define como la cantidad de bienes y servicios que pueden ser adquiridos a diferentes precios del mercado.

Una relación lineal de demanda es de la forma: $p = mx + b$

Donde: p es el precio del bien, x es la cantidad demandada, m es el cambio del precio respecto a un cambio en la cantidad demandada. En tanto que b es el precio al que no se demandaría el producto.

Características:

- $m < 0$
- Es una relación inversa ya que a menor precio se demanda mayor cantidad y viceversa.
- La gráfica se llama curva de demanda.

Ejemplo: La ecuación de demanda de un producto es: $3p + 2x = 60$

Se pide determinar:

a.) ¿A qué precio se demandan 10 unidades?

b.) ¿A qué precio no se compra el producto?

c.) ¿Qué cantidad se demandaría si el producto fuese gratis?

d.) Graficar la curva.

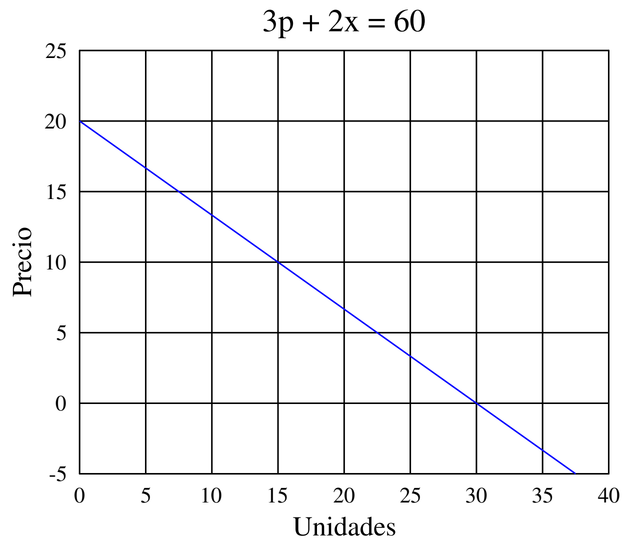
Solución:

a.) $3p + 2(10) = 60$
$3p = 60 - 20$
$p = L.\ 13.33$

b.) Si $x = 0$
$3p + 2(0) = 60$
$p = L.\ 20.00$

c.) Si $p = 0$
$3(0) + 2x = 60$
$x = 30$

d.)



Ejemplo: La función: $4p = -3x + 72$ representa la demanda de un artículo, encontrar:

a.) El precio, si la cantidad demandada es: 8 y 12

b.) La cantidad demandada, si el precio es: L. 6.00 y L. 9.00

c.) ¿Qué cantidad se demandaría si el articulo fuese gratis?

d.) ¿A qué precio no se demandaría el producto?

e.) Graficar la curva.

Algunos apuntes finales sobre Oferta y Demanda.

- Solo los segmentos que están en el primer cuadrante del plano cartesiano tienen sentido económico ya que no hay precio ni cantidad negativa.
- Una posible interpretación a un precio negativo sería que hay que pagarle a los compradores para que se lleven el producto.
- De manera similar, una oferta negativa podría indicar que los bienes no se hallan en el mercado ya sea porque no se producen o porque son retenidos hasta encontrar un precio más favorable.
- En tanto que una demanda negativa indicaría que los precios son tan altos que se impide toda actividad del mercado.

Ejemplo: Determinar qué relación lineal representa cada una de las siguientes curvas: Oferta, Demanda o ninguna (Tip: Para contestar se requiere expresar la función en su forma explicita, es decir: $y = mx + b$).

1.) $6x + 5p = 60$

2.) $7x + 2p + 10 = 0$

3.) $8x - 4p = 120$

Ejemplo: Si 20 unidades de un artículo se demandan a L. 15.00. Y 40 unidades se demandan a L. 10.00. Encontrar la razón promedio de cambio (pendiente) del precio respecto a la cantidad demandada.

$$m = \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{p_2 - p_1}{x_2 - x_1} = \frac{10 - 15}{40 - 20} = -\frac{1}{4}$$

Y la ecuación lineal de Demanda se logra por la formula:

$$p - p_1 = m(x - x_1)$$

Donde: $(x_1,\ p_1)$ es un punto de la curva.

Ejemplo: Un comerciante puede vender 20 rasuradoras eléctricas a un precio de L. 25.00 cada una, pero puede vender 30 rasuradoras a un precio de L. 21.00 cada una.

Obtener la ecuación lineal de demanda y graficar la curva.

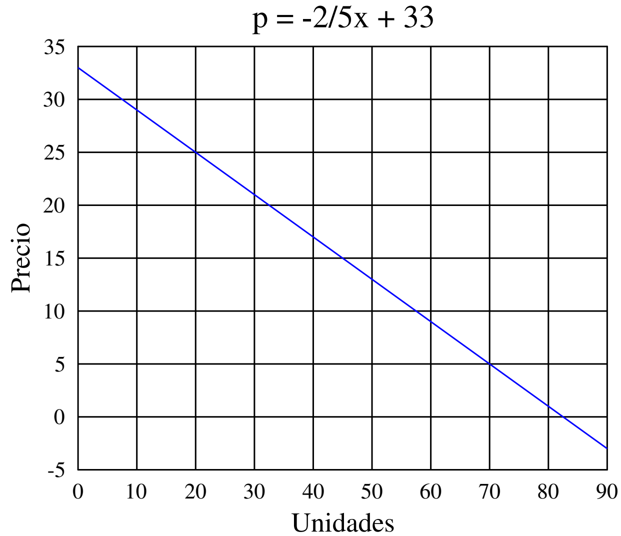
Solución:

$$m = \frac{25 - 21}{20 - 30} = \frac{4}{-10} = -\frac{2}{5}$$

Luego, utilizando $p - p_1 = m(x - x_1)$ obtenemos:

$$p - 21 = -\tfrac{2}{5}(x - 30)$$
$$p = -\tfrac{2}{5}x + 12 + 21$$
$$p = -\tfrac{2}{5}x + 33$$

Y la grafica:



Trate de realizar usted solo los siguientes ejercicios, en ambos casos encuentre la ecuación lineal de oferta y/o demanda y graficar la curva.

1.) Una compaña ha analizado sus ventas y ha encontrado que sus clientes compran un 20 % más de su producto por cada 2 Lempiras de reducción en el precio unitario. Cuando el precio es de L. 12.00 la compañía vende 500 unidades.

2.) A un precio de L. 800.00, un productor ofrece 200 quintales de frijoles a la semana; mientras que a un precio de L. 850.00, ofrece 300 quintales.

1.3.2. Equilibrio de Mercado.

El punto de equilibrio para un artículo ocurre en un precio al cual la cantidad ofrecida es igual a la cantidad demandada. Este punto es la intersección de la curva de oferta con la curva de demanda.

Ejemplo: Las ecuaciones de oferta y demanda de un artículo están dadas por:

$p = 3x + 5$ y $p = 25 - 2x$

Encontrar:

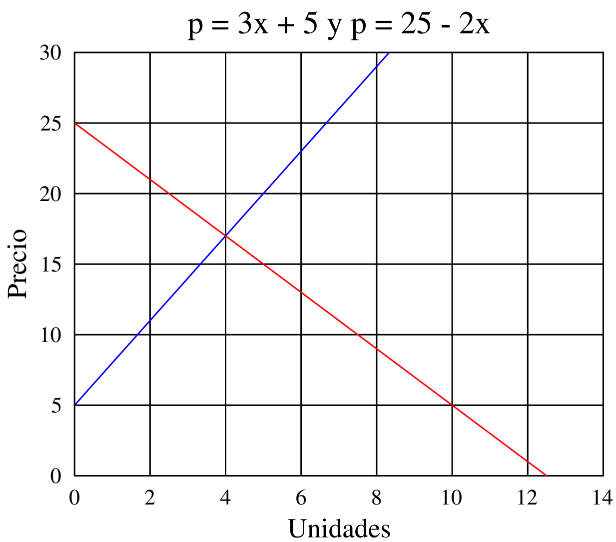
a.) El precio y la cantidad de equilibrio de mercado.

b.) Graficar las curvas.

Solución:

a.) Oferta = Demanda
$3x + 5 = 25 - 2x$
$5x = 20$
$x = 4$
Si $x = 4$ entonces:
$p = 3(4) + 5$
$p = 12 + 5$
$p = 17$
Por tanto:
$PE = (4, 17)$

b.)



Ejemplo: Para practicar en casa, las ecuaciones de oferta y demanda de un producto están dadas por: $p = \frac{15}{7}x + 28$ y $7p + 6x = 490$

Encontrar algebraicamente el precio y la cantidad de equilibrio de mercado y graficar las curvas.

1.3.3. Modelo de Costo Lineal.

En la producción de cualquier bien o servicio por parte de una empresa, se pueden identificar varios tipos de costos. Dos de los cuales son muy importantes para poder determinar, los precios, margenes de contribución y en concecuencia el punto de equilibrio del productor. Estos costos son:

Costos fijos: Son aquellos costos en que incurre la empresa sin importar el nivel al que se produce.

Costos variables: Son aquellos costos que cambian por cada unidad producida.

Por tanto, una manera de obtener el costo total es:

Costo total = costos fijos + costos variables o aprovechando la brevedad de la nomenclatura matemática: $C(x) = CF + CV$

Pero esta última la podemos expresar: $Y_c = mx + b$

Donde:

$C(x)$ **o** Y_c**:** Costo total

x**:** Número de unidades producidas

b**:** Costos fijos

m**:** Cambio en el costo generado por un cambio en las unidades producidas.

Ejemplo: El costo variable de procesar un kilo de granos de café es 50 centavos y los costos fijos por día son de L. 300.00. Encontrar:

a.) La función de costo total

b.) ¿Cuanto costara procesar 1,000 kilos de café por día?

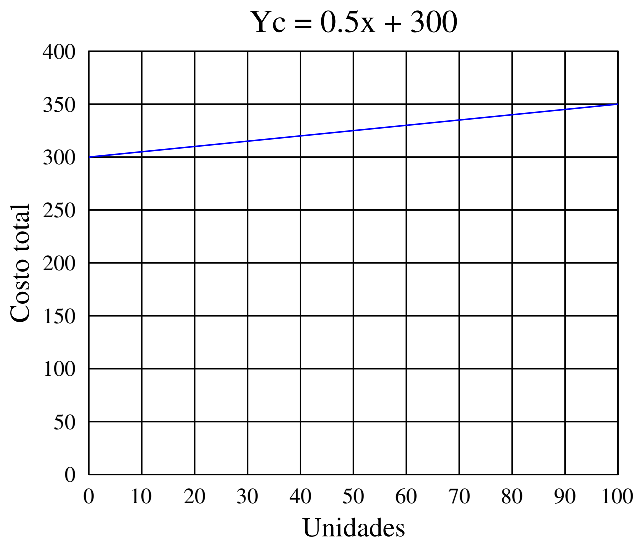
c.) Graficar la curva de costo.

Solución:

a.) $Y_c = 0.50x + 300$

b.) $Y_{c(1000)} = 0.50(1000) + 300$
$Y_{c(1000)} = 800$

c.)



El costo total para producir 2,600 bloques es de L. 800.00. En tanto que el costo para producir 8,000 bloques es de L. 1,400.00.

Hallar:

a.) La función lineal de costo.

b.) ¿Cuantos bloques se producirían con L. 1,000.00?

c.) Graficar la curva de costo.

1.3.4. Equilibrio del Productor.

Para un productor el punto de equilibrio ocurre cuando el ingreso total es igual al costo total. Es decir, el punto donde no pierde ni gana. La ganancia se da cuando el ingreso es mayor que el costo y la pérdida se da cuando el costo es mayor que el ingreso.

Ejemplo: Una fábrica de aceite produce 30 toneladas de aceite a un costo de L. 1,400.00 y produce 70 toneladas a un costo de L. 2,500.00. Se pide:

a.) Encontrar la función lineal de costo.

b.) Si cada tonelada se vende a L. 40.00. Hallar la función de ingreso.

c.) Determinar el punto de equilibrio de la fábrica.

d.) Graficar ambas curvas.

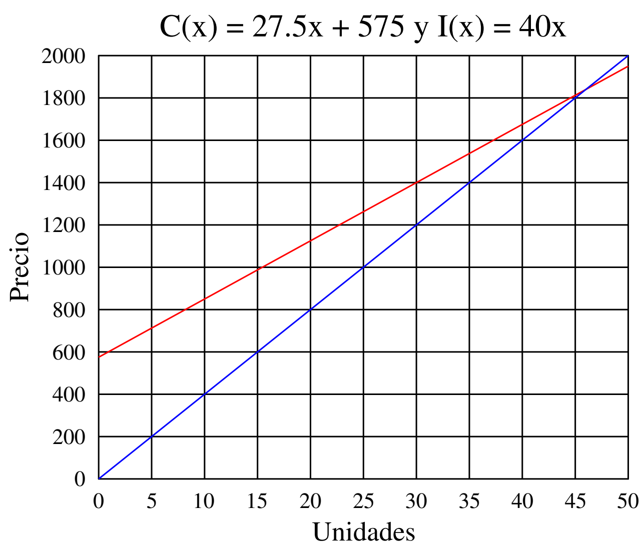
Solución:

a.) $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{2500 - 1400}{70 - 30} = \dfrac{1100}{40} = 27.5$
Luego:
$y - y_1 = m(x - x_1)$
$y - 1400 = 27.5(x - 30)$
$C(x) = 27.5x + 575$

b.) La función ingreso, simplemente es el producto del precio por la cantidad, entonces:
$I(x) = 40x$

c.) $I(x) = C(x)$
$40x = 27.5x + 575$
$x = 46\ toneladas.$
$PE = (46, 1840)$
Comprobación: $I(46) = C(46) => 40(46) = 27.5(46) + 575 = L.1,840.00$

d.)



Ejemplo: Para un agricultor los costos fijos son de L. 5,000.00 al mes y los costos variables son de L. 21.00 por unidad. Se pide:

a.) Determinar la función de costo.

b.) Si cada unidad de su producto se vende a L. 46.00. ¿Cuántas unidades debe producir y vender para estar en equilibrio?

c.) Si se sabe que al menos venderá 180 unidades al mes ¿Cuál deberá ser el precio de venta para no tener perdida?

Solución:

a.) $C(x) = CF + CV$
$C(x) = 5000 + 21x$

b.) $I(x) = 46x$
$I(x) = C(x)$
$46x = 5000 + 21x$
$25x = 5000$
$x = 200\ unidades.$

c.) Recordemos que la función ingreso es el producto del precio por la cantidad y si no queremos perder este ingreso debe ser al menos igual que el costo total, por tanto:
$px = 5000 + 21x$ pero como se sabe que al menos se venderá 180 unidades, entonces:
$p(180) = 5000 + 21(180)$
$180p = 8780$
$p = \frac{8780}{180} = L.48.78$

Ejemplo: Para un fabricante de relojes el costo de mano de obra y materiales es de L. 15.00 y los costos fijos son de L. 2,000.00 al día.

a.) Si vende cada reloj a L. 20.00 ¿Cuántos relojes deberá producir y vender cada día para no tener perdida?

b.) Si se sabe que al menos se venderán 300 relojes por día ¿Qué precio deberá fijarse para garantizar que no hay perdida?

1.3.5. Depreciación Lineal.

Es la reducción constante del valor de un activo hasta un valor de desecho al final del tiempo de vida útil estimado del activo.

Tasa de Depreciación (T.D.).

Es el valor que pierde el activo cada año de su vida útil.

$$T.D. = \frac{Valor\ inicial\ -\ Valor\ de\ desecho}{Tiempo\ de\ vida\ util(\text{años})}$$

Ejemplo: Una empresa compró maquinaria por L. 150,000.00. Se espera que la vida útil de la maquinaria sea de 12 años con un valor de desecho de cero.

Determinar:

a.) El monto de depreciación anual (T. D.)

b.) La función que relaciona el valor depreciado después de x años.

c.) El valor de la maquinaria después del cuarto año.

Solución:

a.) Bien se podría utilizar: $T.D. = \dfrac{V_I - V_D}{T}$

Pero si adaptamos un poco los datos podemos utilizar la formula de la pendiente, así:

$T.D. = \dfrac{0 - 150,000}{12 - 0}$

$T.D. = -12,500\frac{Lempiras}{año}$

b.) Por tanto, para encontrar la función que se nos pide, utilizamos la formula de un punto y la pendiente, así:

$y - 150,000 = -12,500(x - 0)$

$V(x) = 150,000 - 12,500x$

c.) $V(4) = 150,000 - 12,500(4)$
$V(4) = L.100,000$

Ejemplo: Una persona compro una computadora por L. 18,000.00. Con una vida útil de 5 años y un valor de rescate de L. 2,000.00. Obtener:

a.) La tasa de depreciación anual.

b.) La función que relaciona el valor de la computadora a través del tiempo.

c.) El valor de la computadora después del tercer año.

1.4. Anotaciones sobre Funciones Cuadráticas.

Una función cuadrática es aquella en la que la incógnita (variable independiente) aparece al menos una vez elevada al cuadrado (x^2). Por ejemplo: $f(x) = 3x^2 - 3x - 1$. Por tanto su forma general es: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Donde: a, b, c y son números reales siempre y cuando $a \neq 0$.

Algunos datos adicionales sobre funciones cuadráticas:

- Su dominio son todos los números reales, y su rango también todos los números reales.

- Su gráfica en el plano cartesiano es una parábola. La concavidad de la gráfica depende del signo de a, así: si $a < 0 \Rightarrow \cap$ y si $a > 0 \Rightarrow \cup$.
- Los interceptos en x están dados por la formula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- El intercepto en y se da cuando $x = 0$ y por tanto $I_y = c$ es decir, es el punto: $(0, c)$
- El vértice es el punto:$\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

Solución a sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas (lineales y/o cuadráticas).

Para sistemas de dos incógnitas, una manera de encontrar la solución es mediante el método gráfico. Es decir, trazar las gráficas y observar en que punto o puntos se interceptan. Sin embargo, se puede perder precisión al señalar los puntos de intercepción. Por tanto, se prefieren métodos algebraicos. Por suerte los métodos previamente mencionados de sustitución, reducción e igualación, también se pueden utilizar para obtener la respuesta a este tipo de sistemas. Con las siguientes consideraciones:

- Si las ecuaciones del sistema son solo lineales, puede haber una solución, no solución, o un número infinito de soluciones (para un sistema de dos ecuaciones lineales).
- Si el sistema esta formado por una función lineal y una cuadrática, las posibilidades son: Que el sistema tenga una única solución, que el sistema no tenga solución, o que el sistema tenga dos soluciones.
- Ahora si el sistema esta formado por dos ecuaciones cuadráticas, las posibilidades son: Que el sistema tenga una solución, que el sistema tenga dos soluciones, que el sistema no tenga solución, o que el sistema tenga infinitas soluciones.

1.5. Aplicaciones de las Funciones Cuadráticas.

La aplicación de las funciones cuadráticas, como recién se expuso, tiene un comportamiento similar, al de las funciones lineales y de hecho al igualar y durante la simplificación de expresiones, se puede terminar con funciones lineales. Si no fuese el caso, basta con conocer y aplicar las formulas compartidas previamente. En ese sentido la aplicación de funciones cuadráticas es practicamente la misma que para las funciones lineales. Sin embargo por brevedad, solo se demostrará la aplicación en problemas de oferta y demanda, así como en curvas de transformación de producto.

1.5.1. Curva de Demanda y Oferta Cuadrática.

Para los siguientes pares de ecuaciones determinar:

a.) ¿Cuál representa una curva de oferta y cuál de demanda?

b.) Encontrar algebraicamente el punto de equilibrio de mercado.

c.) Graficar ambas curvas.

Ejemplo: Las primeras ecuaciones son: $p = 2 + \frac{1}{5}x + \frac{x^2}{20}$ y $p = \frac{30-x}{4}$

Solución:

a.) Oferta: $p = 2 + \frac{1}{5}x + \frac{x^2}{20}$ y Demanda:$p = \frac{30-x}{4}$

b.) Oferta = Demanda
$2 + \frac{1}{5}x + \frac{x^2}{20} = \frac{30-x}{4}$ <- Multiplicar ambos lados por 20 para eliminar fraciones.
$40 + 4x + x^2 = 150 - 5x$ <- Simplificar
$x^2 + 9x - 110 = 0$ <- Aplicar cuadrática.

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4(1)(-110)}}{2(1)}$$

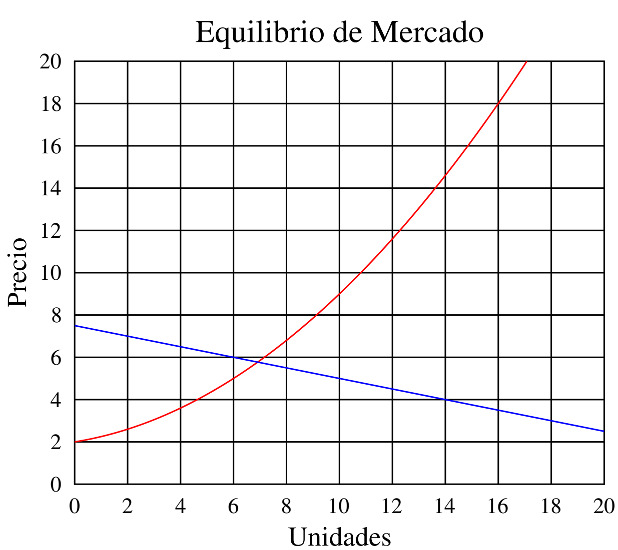
$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{521}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-9 + 22.83}{2} = 6.9 \ unidades.$$

$$x_2 = \frac{-9 - 22.83}{2} = -15.91 = N.A.$$

Por tanto para obtener el precio, sustituimos este resultado en cualquiera de las ecuaciones originales, por brevedad utilizare la de Demanda.
$p = \frac{30-6.9}{4}$
$p = 5.8$
Por tanto, el P.E.: $(6.9, 5.8)$

c.)

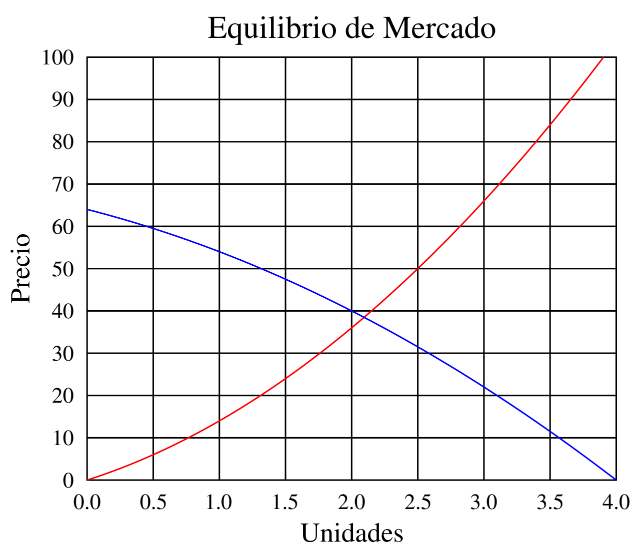


Ejemplo: $x = 10p + 4p^2$ y $x = 64 - 8p - 2p^2$
Solución:

a.) Oferta: $x = 10p + 4p^2$ y Demanda: $x = 64 - 8p - 2p^2$

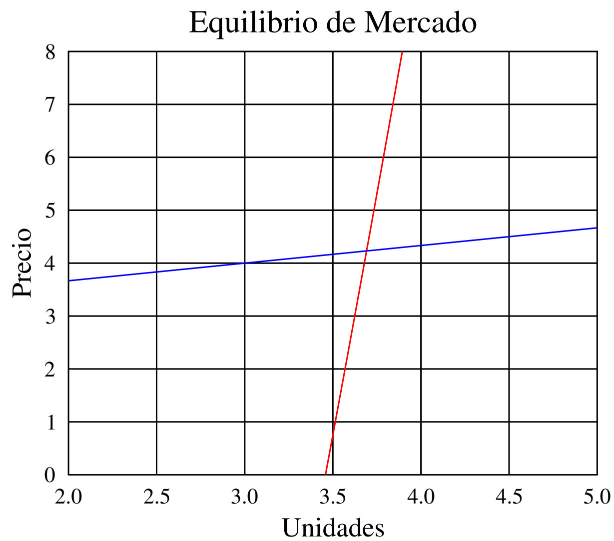
b.) Oferta = Demanda <- Igualar
$10p + 4p^2 = 64 - 8p - 2p^2$ <- Simplificar
$6p^2 + 18p - 64 = 0$ <- Dividir por mcm, NO es necesario pero simplifica el trabajo.
$3p^2 + 9p - 32 = 0$ <- Aplicar formula general cuadrática
$$p = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4(3)(-32)}}{2(3)}$$
$p = \frac{-9 \pm 21.56}{6}$
$p_1 = L.\ 2.09$ y $p_2 = -5.09 = N.A.$
$x = 10(2.09) + 4(2.09)^2$ <- Sustituir el precio encontrado en cualquiera de las ecuaciones para obtener la cantidad de equilibrio.
$x = 38.37$
P.E.:$(38.37, 2.09)$

c.)



Ejemplo: $(x + 5)(x + 6) = 80$ y $p = \frac{x}{3} + 3$

Este ejemplo queda para que lo trabajen por su cuenta, pero les comparto, el grafico a continuación:



1.5.2. Curva de Transformación de Producto.

Una curva de transformación de producto es aquella que muestra las distintas cantidades de dos artículos que pueden producirse con los mismos recursos. Aunque para fines académicos se pueden utilizar relaciones lineales, es más común mostrar este tipo de relación con curvas no lineales trazadas en el primer cuadrante; por tanto se utilizaran graficas de parábolas (funciones cuadráticas), funciones implícitas y graficas de círculos o semicírculos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo: La curva $y = 60 - x - \frac{1}{2}x^2$ es una curva de transformación de producto.

Determinar las mayores cantidades del articulo x y del articulo y que se pueden producir y graficar la curva.

Solución:

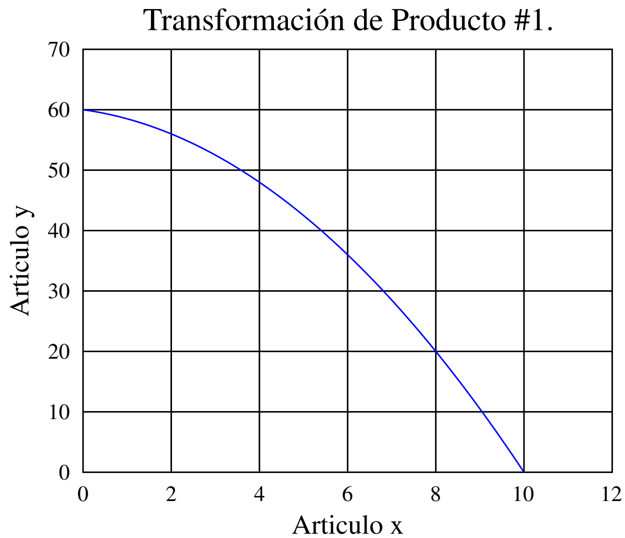
La mayor cantidad del articulo y que se puede producir es no produciendo x es decir, si $x = 0$ por tanto: $y = 60$ o en notación de punto: $P_1 = (0,\ 60)$

Del mismo modo la mayor cantidad del articulo x que se puede producir es no produciendo y es decir, si y = 0 por tanto:

$0 = 60 - x - \frac{1}{2}x^2$ <- Multiplicar por 2 para eliminar fracción (paso opcional) y pasar al otro lado del igual
$x^2 + 2x - 120 = 0$ <- Factorizar (si es posible, si no aplicar formula general cuadrática).
$(x + 12)(x - 10) = 0$
Por tanto:
$x_1 = -12$ y $x_2 = 10$ <- Descartar el valor negativo.

$x = 10$ y de nuevo en notación de punto: $P_2 = (10,\ 0)$

Y la respectiva grafica es:



Ejemplo: La curva $(x-20)(y-15) = 120$ es una curva de transformación de producto, para valores de $y < 15$, se pide:

a.) Obtener las mayores cantidades del producto x y y que se pueden producir.

b.) Si $x = 2y$ ¿Qué cantidades se pueden producir?

c.) Graficar la curva.

Solución:

a.) Las mayores cantidades del producto x se logran cuando no se produce y. De manera similar las mayores cantidades de y se dan cuando no se produce x, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} &\text{Si } x = 0 \\ (0-20)(y-15) &= 120 \\ -20y + 300 &= 120 \\ -20y &= 120 - 300 \\ y &= -6 + 15 \\ y &= 9 \\ P_1 &= (0,\ 9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Si } y = 0 \\ (x-20)(0-15) &= 120 \\ -15x + 300 &= 120 \\ -15x &= 120 - 300 \\ x &= -8 + 20 \\ x &= 12 \\ P_2 &= (12,\ 0) \end{aligned}$$

b.) Para satisfacer la restricción que dice que: $x = 2y$ se puede utilizar el método de igualación, aunque al ser este ejemplo una función implicita, la sustitución es un método más apropiado como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Si } x &= 2y \\ (2y-20)(y-15) &= 120 && \text{<- Sustituir la } x \text{ por } 2y \\ 2y^2 - 30y - 20y + 300 &= 120 && \text{<- Simplificar dividiendo ambos lados por 2 (opcional)} \\ y^2 - 25y + 90 &= 0 && \text{<- Aplicar la cuadratica} \end{aligned}$$

$y = \dfrac{-(-25 \pm \sqrt{(-25)^2 - 4(1)(90)}}{2(1)}$

$y = \dfrac{25 \pm 16.3}{2}$

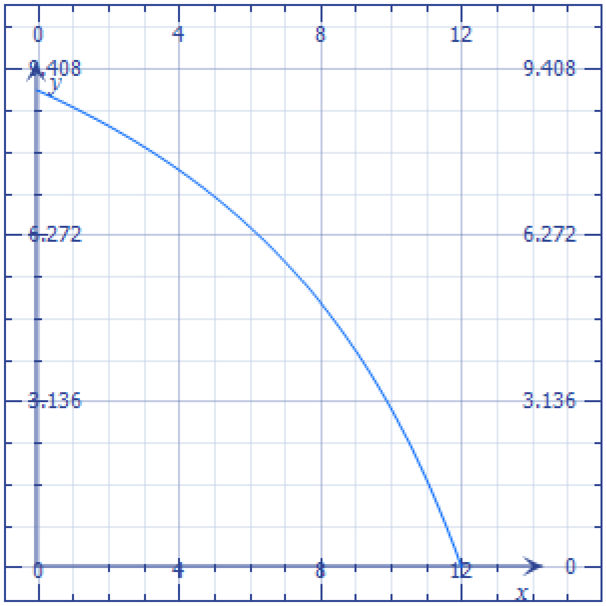
$y_1 = 4.35$ y $y_2 = 20.65$ este segundo valor se ignora por violar restricción $y < 15$.
Por tanto, para obtener el valor de x basta con sustituir, en $x = 2y$ así:
$x = 2(4.35)$
$x = 8.70$ o lo que es lo mismo: $P_3 = (8.70,\ 4.35)$

c.) Graficar la curva. Para esto se elabora una tabla xy centrandose en los puntos obtenidos en los incisos anteriores, así:
$(x-20)(y-15) = 120$

Punto	x	y
Solo producto y	0	9
Solo producto x	12	0
Si $x = 2y$	8.7	4.35

Sin embargo, graficar con solo 3 puntos puede reducir precisión a la grafica, por lo tanto se deben agregar al menos 3 puntos ¿Qué valores? En este caso, valores para x entre 0 y 12, y despejando para obtener el valor de y y de esta manera ampliar los valores de la tabla, así:

Punto	x	y
Solo producto y	0	9
3 unidades de x	3	7.94
6 unidades de x	6	6.43
9 unidades de x	9	4.09
Solo producto x	12	0
Si $x = 2y$	8.7	4.35



Ejemplo: Una Industria de bicicletas produce dos tipos de bicicletas llamadas CORONADO (x) y ESTRELLA (y). Las cantidades posibles que puede producir al año en miles están relacionadas por la ecuación: $x^2 + y^2 + 13x + 2y - 48 = 0$. Se Pide:

a.) Hallar las mayores cantidades de bicicletas tipo x y tipo y que se pueden producir.

b.) Si la demanda de bicicleta tipo x es la de y más uno ¿Qué cantidades se deben producir?

c.) Graficar la curva.

Solución:

a.) Las mayores cantidades de bicicletas CORONADO se logran cuando no se producen ESTRELLAS. De manera similar las mayores cantidades de ESTRELLAS se dan cuando no se producen CORONADOS.

Si $x = 0$ Si $y = 0$

$y^2 + 2y - 48 = 0$	$x^2 + 13x - 48 = 0$	<- Por factorización ó por FGC
$(y-8)(y-6) = 0$	$(x+16)(x-3) = 0$	<- Ignorar valor negativo
$y = 6$	$x = 3$	
$P_1 = (0,\ 6)$	$P_2 = (3,\ 0)$	

b.) Para satisfacer la restricción que dice que: $x = y + 1$ de nuevo se utiliza el método de sustitución como sigue:

$$
\begin{aligned}
&\text{Si } x = y + 1 \\
(y+1)^2 + y^2 + 13(y+1) + 2y - 48 &= 0 \quad \text{<- Sustituir la } x \text{ por: } y+1 \\
y^2 + 2y + 1 + y^2 + 13y + 13 + 2y - 48 &= 0 \quad \text{<- Simplificar y factorizar ó utilizar FGC} \\
2y^2 + 17y - 34 &= 0 \quad \text{<- Aplicar la cuadratica}
\end{aligned}
$$

Descartar el valor negativo:
$y_1 = 1.6714$
Por tanto, para obtener el valor de x basta con sustituir, así:
$x = 1.6714 + 1 = 2.6714$ o en notación de punto: $P_3 = (2.6714,\ 1.6714)$

c.) Graficar la curva. En esta ocasión se puede sacar ventaja que al parecer se esta trabajando con la ecuación de un circulo, así que una manera de graficar es buscando su centro y radio. Para lo cual se convierte la ecuación que esta en la formula general a la forma estándar del circulo es decir: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Esto se logra completando el cuadrado. Luego de seguir ese procedimiento se llega a: $(x + \frac{13}{2})^2 + (y+1)^2 = \frac{365}{4}$
Sin embargo, la combinación de el centro: (-13/2, -1) y radio: 9.55 tampoco es fácil de graficar. Así que alternativamente, se puede elaborar una tabla xy enfocándose en los puntos cercanos a los obtenidos en los incisos anteriores, así:
$x^2 + y^2 + 13x + 2y - 48 = 0$

Punto	x	y
Solo producto y	0	6
4 unidades de y	1.64	4
2 unidades de y	2.57	2
Solo producto x	3	0
Si $x = y + 1$	1.67	2.67

Pendiente la grafica (preguntar en clase).

Ejemplo: El propietario de un huerto produce dos tipos de naranja, para mesa (x) y para fermentación (y). Las cantidades posibles en kilogramos que puede producir están relacionadas por la ecuación: $(x-50)(y-40) = 1000$ se pide:

a.) Hallar las mayores cantidades de los dos tipos de naranjas que puede producir.

b.) Si la demanda del tipo de naranja para mesa es el doble que la demanda de la naranja para fermentación ¿Qué cantidades se deben producir?

c.) Graficar la curva.

Ejemplo: El propietario de una quesería artesanal produce queso (x) y mantequilla (y). Las cantidades en libras que puede producir están relacionadas por la ecuación: $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 44 = 0$ se pide:

a.) Hallar las mayores cantidades de cada producto que puede producir.

b.) Si la demanda del queso es de 5 libras más que el doble que la demanda de la rica mantequilla, ¿Qué cantidades se deben producir?

c.) Graficar la curva.

1.6. Repaso sobre Derivadas.

La derivada de una función en un punto x surge del problema de calcular la tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x. Gracias al cálculo de derivadas es posible resolver problemas en los que intervengan dos magnitudes y queramos determinar el valor de una de ellas para que la otra alcance un valor máximo o mínimo; es por esto que, como veremos posteriormente, la derivación tiene muchas aplicaciones en la economía.

1.6.1. Notación de Incrementos.

El símbolo matemático para denotar un cambio o incremento en x es: Δx que se lee "delta equis". De modo que Δx = valor final - valor inicial

Ejemplo: Hallar el Δx cuando x cambia de:

a.) 40 a 60

b.) 100 a 85

Solución:

a.) 40 a 60
$\Delta x = 60 - 40$
$\Delta x = 20$

b.) 100 a 85 $\Delta x = 85 - 100$
$\Delta x = -15$

Del mismo modo el símbolo matemático para denotar un cambio o incremento en y es: Δy que se lee "delta y". De modo que Δy = valor final - valor inicial

Ejemplo: Sea $y = 20x - 0.4x^2$ hallar el Δx y Δy cuando x cambia de:

a.) 30 a 40

b.) 80 a 60

Solución:

Para encontrar el Δx se procede tal como se explico previamente, de hecho para encontrar el Δy también se procede igual, con la salvedad que hay que calcular ambos valores de y (a diferencia de los valores de x), pero como se tiene una función es cosa de simplemente sustituir el valor de x. Una vez calculados los valores de y se puede construir una tabla como la que se muestra a continuación.

a.) 30 a 40
$y = 20(30) - 0.4(30)^2$
$y = 240$
$y = 20(40) - 0.4(40)^2$
$y = 160$

Δx	x	y	Δy
10	30	240	-80
	40	160	

b.) 80 a 60
$y = 20(80) - 0.4(60)^2$
$y = -960$
$y = 20(60) - 0.4(60)^2$
$y = -240$

Δx	x	y	Δy
-20	80	-960	720
	60	-240	

Ejemplo: Si $y = 10$ encontrar el Δx y Δy cuando x cambia de 35 a 50.

Δx	x	y	Δy
15	35	10	0
	50	10	

Nota: Esto muestra que los cambios o incrementos pueden ser: positivos, negativos o cero.

Ejemplo: Sea $f(x) = 4 + 7x + 0.5x^2$ hallar el Δx y Δy cuando:

a.) x cambia de 5 a 12

b.) x cambia de 140 a 210

Ejemplo: Un fabricante de un producto descubre que el costo de producir x artículos esta dado por la ecuación: $C(x) = 0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1000$

Determinar el incremento en el costo cuando las unidades producidas se incrementan de 50 a 60.

1.6.2. Razón Promedio de Cambio.

El cociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ se conoce como la razón promedio de cambio de y respecto a x.

Ejemplo: El ingreso semanal en Lempiras por la venta de x unidades de cierto articulo está dado por: $I(x) = 500x - 2x^2$

Determinar la tasa promedio de cambio del ingreso cuando las unidades vendidas se incrementan de 100 a 120 unidades.

Se procede de manera similar al tema anterior. Es decir se calcula Δx y el ΔI. Opcionalmente, se puede construir una tabla y luego se calcula la razón promedio de cambio.

$I(100) = 500(100) - 2(100)^2$
$I(100) = 30000$
$I(120) = 500(120) - 2(120)^2$
$I(120) = 31200$
Y la tabla queda:

Δx	x	I	ΔI
20	100	30000	1200
	120	31200	

Por tanto, $\dfrac{\Delta I}{\Delta x} = \dfrac{1200}{20} = 60$ Lempiras.

Ejemplo: El número de libras de duraznos (p) de buena calidad producidas por un árbol promedio en cierto huerto depende del número de libras de insecticida (x) con el cual el árbol fue rociado de acuerdo con la siguiente fórmula: $p = \dfrac{100}{1-x}$

Calcular la razón promedio de incremento del número de libras de duraznos cuando el número de libras de insecticida cambia de 0 a 3. El Δx se puede definir de la siguiente manera: $\Delta x = (x_1 + \Delta x) - x_1$ y el Δy se puede definir de la siguiente manera: $\Delta y = (y_1 + \Delta y) - y_1$ de modo que $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ es un cociente de dos incrementos que se conoce como la razón promedio de cambio de y respecto a x cuando x cambia de x a $x_1 + \Delta x$.

Ejemplo: Para un productor la función de costo para la producción de su producto esta dada por: $10 + 3x + 0.1x^2$ obtener:

a.) La razón promedio de cambio del costo cuando el número de unidades producidas cambia de x a $x_1 + \Delta x$.

b.) La razón promedio de cambio del costo cuando el número de unidades producidas cambia de 100 a 150.

Solución:

a.)

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_1+\Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{10 + 3(x_1+\Delta x) + 0.1(x_1+\Delta x)^2 - (10 + 3x_1 + 0.1x_1^2)}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{10 + 3x_1 + 3\Delta x + 0.1x_1^2 + 0.2x_1\Delta x + 0.1\Delta x^2 - 10 - 3x_1 - 0.1x_1^2)}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{3\Delta x + 0.2x_1\Delta x + 0.1\Delta x^2}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = 3 + 0.2x_1 + 0.1\Delta x$$

b.) Aquí $x_1 = 100$ y $\Delta x = 50$ por tanto:
$\frac{\Delta C}{\Delta x} = 3 + 0.2(100) + 0.1(50)$
$\frac{\Delta C}{\Delta x} = 28$ Lempiras.

Ejemplo: La función de ingreso por la venta de x unidades de un artículo en Lempiras esta dada por: $I(x) = 30x - 0.02x^2$ Obtener:

a.) La tasa promedio de cambio del ingreso cuando las unidades vendidas cambian de a x a $x_1 + \Delta x$

b.) La tasa promedio de cambio del ingreso cuando las unidades vendidas cambian de 60 a 80.

Ejemplo: Una empresa tiene utilidades en la producción y venta de un producto según la ecuación: $U(X) = -25 + 3x - 0.03x^2$ Obtener:

a.) La razón promedio de la utilidad respecto al número de unidades producidas y vendidas cuando estas cambian de x a $x_1 + \Delta x$

b.) La razón promedio de cambio de la utilidad cuando las unidades producidas y vendidas cambian de 50 a 60.

1.6.3. La Derivada.

La primera derivada de y respecto a x es el límite de la razón promedio de cambio de y respecto a x cuando ese cambio se hace muy pequeño. La primera derivada de y respecto a x se denota por alguna de las siguientes formas:

$\frac{dy}{dx}; f^1(x); D_x y$; etc.

De modo que: $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Algunas de las Reglas para la Derivación.

1.) Si $y = k$ donde k es una constante $=> \dfrac{dy}{dx} = 0$

2.) $y = x^n$ para $n \in \mathbb{R} => \dfrac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

3.) $y = u + v$ donde $u = f(x); v = g(x) => \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$

4.) $y = u \cdot v$ donde $u = f(x); v = g(x) => \dfrac{dy}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

5.) $y = \frac{u}{v}$ donde $u = f(x); v = g(x) => \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

6.) $y = u^n$ donde $u = f(x) => \dfrac{dy}{dx} = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$

7.) $y = \log_a u$ donde $u = f(x) => \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\log_a e}{u} \cdot \dfrac{du}{dx}$

8.) $y = \ln u$ donde $u = f(x) => \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{u} \cdot \dfrac{du}{dx}$

9.) $y = a^u$ donde $u = f(x) => \dfrac{dy}{dx} = a^u \ln a \cdot \dfrac{du}{dx}$

10.) $y = e^u$ donde $u = f(x) => \dfrac{dy}{dx} = e^u \cdot \dfrac{du}{dx}$

Nota: Pendiente agregar algo sobre derivación implícita (preguntar en clase).

Ejemplos: Obtener la derivada de y respecto a x de las siguientes funciones:

a.) $y = \frac{x^3}{3} - 5x^2 + 3x - 4$ R: $\frac{dy}{dx} = x^2 - 10x + 3$

b.) $y = -10 + 40x - 0.03x^2$ R: $\frac{dy}{dx} = 40 - 0.06x$

c.) $y = \sqrt[3]{6x-5}$

d.) $y = \log_2(4x-3)^4$

e.) $y = \ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^5$

f.) $y = e^{x^3}$

g.) $x = \sqrt{2-5y}$

h.) $3x + y^2 = \frac{6}{x+y}$

1.7. Aplicaciones de la Derivada a la Economía.

La Derivada tiene muchas aplicaciones en la Economía y Administración en lo que se refiere a la construcción de tasas marginales. La palabra marginal significa una tasa promedio de cambio, que es la derivada. El estudio de este concepto de marginalidad, permite a los economistas tomar decisiones sobre producción y costos entre otros.

Las derivadas son particularmente útiles para análisis de optimización. De modo que existen varios teoremas basados en la primer, segunda y tercer derivada e incluso puede ser necesario calcular también los puntos de inflexión (también conocidos como puntos silla o de ensilladura). Es oportuno brevemente repasar las denominadas condiciones de primer y segundo orden. La condición de primer orden dice que si una función tiene un punto máximo o mínimo, su primer derivada en dicho punto deberá ser igual a cero. Sin embargo esto no es concluyente, ya que para que ese punto sea un máximo la segunda derivada de la función en ese punto debe ser menor que cero; si fuese mayor que cero, el punto sería un mínimo. Si esta segunda derivada fuese igual a cero, fallaría el criterio de segundo orden y no sabríamos si el punto es un máximo relativo en x, un mínimo relativo en x o ninguno de los dos. En tales casos, se puede utilizar el criterio de la primera derivada o el criterio de la tercera derivada.

Costo Marginal.

Se define como el incremento en el costo total por cada unidad adicional que se produce. Matemáticamente se denota:

$$CMg = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$
$$CMg = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x+\Delta x) - C(x)}{\Delta x}$$
$$CMg = \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

Ejemplo: Dada la función de costo total $C(x) = 0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1000$
Determinar:

a.) La función de costo marginal.

b.) El costo marginal cuando se producen: 50, 100, 150 unidades.

c.) La función de costo promedio.

Solución:

a.) $CMg = 0.003x^2 - 0.6x + 40$

b.) Si $x = 50 => CMg(50) = 0.003(50)^2 - 0.6(50) + 40 => CMg(50) = 17.50$
Si $x = 100 => CMg(100) = 0.003(100)^2 - 0.6(100) + 40 => CMg(100) = 10$
Si $x = 150 => CMg(150) = 0.003(150)^2 - 0.6(150) + 40 => CMg(150) = 17.50$

c.) $Costo \quad Promedio = \frac{Costo \quad Total}{numero\ de\ unidades\ producidas}$
$CP = \frac{CT}{x} = \frac{0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1000}{x}$
$CP = 0.001x^2 - 0.3x + 40 + \frac{1000}{x}$

Observaciones / Conclusiones:

Las siguientes observaciones asumen que el análisis se efectúa en el corto plazo y por tanto se puede decir que:

- El costo marginal decrece cuando la producción se incrementa de 50 a 100 unidades. Esto es frecuente cuando la producción aumenta a partir de valores pequeños. Es decir baja el costo promedio por el pequeño incremento en la producción.
- Después de cierto punto el costo marginal se incrementa (cuando la producción aumenta de 100 a 150 unidades). Este fenómeno se da cuando la producción se hace grande y la capacidad de las unidades de producción fijas es insuficiente en relación las unidades de producción variables. Entonces la empresa tiene que invertir en nuevo equipo, maquinaria, horas extras etc. Así que el costo marginal primero decrece y después aumenta.
- El costo marginal de 17.50 significa que cuando se producen 50 unidades el costo total se incrementa en 17.50 por unidad adicional. Lo que informalmente se puede decir que el costo de producir la unidad 51 es 17.50

Ejemplo: La función de costo total para un fabricante de un producto es: $C(x) = 0.03x^2 + 7x + 60$
Encontrar:

a.) La función de costo marginal.

b.) El costo marginal cuando se producen 130 unidades.

c.) El costo real al producir la unidad 131.

Solución:

a.) $CMg = 0.06x + 7$

b.) $CMg(130) = 0.06(130) + 7 => CMg(130) = 14.80$

c.) $CReal(131) = CReal(131) - CReal(130)$
$C(131) = [0.03(131)^2 + 7(131) + 60] - [0.03(130)^2 + 7(130) + 60]$
$C(131) = 14.83$

Ejemplo: Para una empresa el costo total en la fabricación de un producto está dado por la función: $C(x) = 20x - 0.06x^2 + 0.0002x^3$
Determinar:

a.) La función de costo promedio.

b.) El número de unidades que debe fabricar para minimizar el costo promedio.

c.) El costo promedio mínimo.

Solución:

a.) $CP = \frac{C(x)}{x} = \frac{20x-0.06x^2+0.0002x^3}{x}$
$CP = 20 - 0.06x + 0.0002x^2$

b.) $CP^1(x) = -0.06 + 0.0004x$
La condición de primer orden, dice que el punto máximo o mínimo de una función se alcanza, cuando su primer derivada es igual a cero.
$-0.06 + 0.0004x = 0 \quad => x = 150$ unidades.

c.) $CP_{min} = 20 - 0.06(150) + 0.0002(150)^2$
$CP_{min} = 15.50$

Ejemplo: Una empresa tiene costo total en la producción de un producto según la ecuación: $C(x) = x^3 - 6x^2 + 14x + 5$
Hallar:

a.) La función de costo marginal.

b.) El costo marginal cuando se producen 70 unidades.

c.) El costo real al producir la unidad 71.

Ingreso Marginal.

El ingreso marginal es el incremento en el ingreso total por cada unidad adicional que se vende. Dicho de otra manera, es la tasa con la que crece el ingreso con respecto al incremento en el volumen de ventas.

Cuando el ingreso marginal es igual a cero el ingreso total es máximo.

$$IMg = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta x}$$
$$IMg = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{I(x+\Delta x) - I(x)}{\Delta x}$$
$$IMg = \frac{dI}{dx}$$

Ejemplo: El ingreso en Lempiras por la venta de x artículos de una empresa esta dado por la ecuación: $I(x) = 10x - 0.01x^2$
Determinar:

a.) El número de unidades que se deben vender para obtener un ingreso máximo.

b.) El ingreso máximo.

c.) El ingreso marginal cuando se venden 200 unidades.

d.) El ingreso real al vender la unidad 201.

Solución:

a.) $IMg = 10 - 0.02x$
$I(x) = máx \Rightarrow 10 - 0.02x = 0 \Rightarrow x = 500$ unidades.

b.) $I(500) = 10(500) - 0.01(500)^2$
$I(500) = 2500$

c.) $IMg(200) = 10 - 0.02(200)$
$IMg(200) = 6$

d.) $IReal(201) = I(201) - I(200)$
$IReal = [10(201) - 0.01(201)^2] - [10(200) - 0.01(200)^2]$
$IReal = 1605.99 - 1600.00$
$IReal = 5.99$

La función de ingreso puede escribirse de la siguiente manera: $I(x) = p \cdot x$ donde: p es el precio del producto y x es el número de unidades vendidas.

Esto comprueba que existe una relación entre el precio y la cantidad, que se llama demanda; cuanto más bajo sea el precio del producto, más unidades pueden venderse y cuanto mas alto sea el precio, menor será el volumen de ventas.

Ejemplo: La función de demanda de un artículo está dada por: $x = 1000 - 100p$
Determinar:

a.) El ingreso marginal al vender 300 unidades.

b.) El ingreso real al vender la unidad 301.

Solución:

a.) Demanda: $x = 1000 - 100p$
$100p = 1000 - x$
$p = 10 - 0.01x \quad => I(x) = p \cdot x \quad => I(x) = (10 - 0.01x)x$
$I(x) = 10x - 0.01x^2$
$IMg(x) = 10 - 0.02x => IMg(300) = 4$
Significa que cuando se venden 300 unidades cualquier incremento en las ventas provoca un aumento en el ingreso de 4 Lempiras por unidad.

b.) $IReal(301) = [10(301) - 0.01(301)^2] - [10(300) - 0.01(300)^2]$
$IReal = 3.99$

Ejemplo: El ingreso mensual por la venta de x artículos en cierta empresa está dada por: $I(x) = 12x - 0.03x^2$
Determinar:

a.) El número de unidades que maximizan el ingreso.

b.) El ingreso máximo.

c.) El ingreso marginal al vender 180 unidades y analice el resultado.

Utilidad Marginal.

La utilidad que una empresa obtiene está dada por la diferencia entre sus ingresos y sus costos.

$U(x) = I(x) - C(x)$ y la $UMg = \frac{dU}{dx}$

La utilidad marginal representa la utilidad adicional por articulo cuando la producción y venta sufre un pequeño incremento.

Ejemplo: La ecuación de demanda de cierto artículo es $p + 0.1x = 80$ y la ecuación de costo de producir dicho artículo es: $C(x) = 5000 + 20x$
Obtener:

a.) La función de Utilidad.

b.) La utilidad marginal cuando se producen y venden 150 unidades.

c.) El número de unidades que se deben producir y vender para maximizar la utilidad.

d.) La utilidad máxima.

e.) La utilidad marginal cuando se producen y venden 400 unidades.

Solución:

a.) $I(x) = x(80 - 0.1x)$ Demanda: $p = 80 - 0.1x$
$I(x) = 80x - 0.1x^2$
$U(x) = (80x - 0.1x^2) - (5000 + 20x)$
$U(x) = -0.1x^2 + 60x - 5000$

b.) $UMg = -0.2x + 60$
$UMg(150) = -0.2(150) + 60$
$UMg(150) = 30$
Significa que cuando se producen y venden 150 artículos cualquier aumento en la producción y venta provoca una utilidad de 30 Lempiras.

c.) $-0.2x + 60 = 0 => x = \frac{-60}{-0.2} => x = 300$

d.) $U(300) = -0.1(300)^2 + 60(300) - 5000 => U(300) = 4000$ Lempiras.

e.) $UMg(400) = -0.2(400) + 60 => UMg(400) = -20$
Significa que después de las 400 unidades la empresa pierde 20 Lempiras por cada unidad extra que produzca y venda.

Ejemplo: Para cierto articulo la función de demanda es $p = 5 - 0.001x$ y la función de costo es: $C(x) = 2800 + x$
Determinar:

a.) El número de unidades que hay que producir y vender para maximizar la utilidad. R:\2000.

b.) La utilidad máxima R:\1200.

c.) A qué precio ocurre la máxima utilidad. R:\3 Lempiras.

Ejemplo: Una empresa tiene costos mensuales fijos de 2,000 Lempiras y el costo variable de su producto es de 25 Lempiras por unidad. Si el ingreso obtenido por vender x unidades es: $I(x) = 60x - 0.01x$
Determinar:

a.) La función de utilidad.

b.) El volumen de producción que maximiza la utilidad.

c.) La utilidad máxima.

Problemas de Extremos Absolutos.

Ejemplo: El costo de producir x artículos por semana es: $C(x) = 1000 + 6x - 0.003x^2 + 10^{-6}x^3$ pero no mas de 3000 artículos pueden producirse por semana. Si la ecuación de demanda es $p = 12 - 0.0015x$
Hallar:

a.) El nivel de producción que maximiza el ingreso. R:\3000.

b.) El nivel de producción que maximiza la utilidad. R:\2000.

Ejemplo: La ecuación de demanda del producto de una compañía es $p = 200 - 1.5x$ en donde x unidades pueden venderse a un precio de p Lempiras cada una. Si le cuesta a la compañía $C(x) = 500 + 65x$ producir x unidades por semana ¿Cuántas unidades deberá producir y vender por semana con el objeto de maximizar la utilidad? Si la capacidad de producción es a lo mas:

a.) 60 unidades.

b.) 40 unidades.

Tasas Relacionadas.

Si $y = f(x)$ y supóngase que x varia como una función del tiempo, así dado que y es una función de x entonces y también variara con el tiempo. De ahí que: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ muestra una relación directa entre las dos tasas $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{dx}{dt}$.

Ejemplo: Una empresa tiene la función de costo $C(x) = 10 + 8x - \frac{1}{5}x^2$ donde x es el nivel de producción. Si este nivel de producción es 12 unidades actualmente y está creciendo a una tasa de 0.3 por año. Obtener la tasa en que los costos de producción se están elevando.
$\frac{dc}{dt} = \frac{dc}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ sabemos que: $x = 12$ y $\frac{dx}{dt} = 0.3$
$\frac{dc}{dt} = \left(8 - \frac{2}{5}x\right)(0.3) \frac{dc}{dx} = \left(8 - \frac{2}{5}x\right)$
$\frac{dc}{dt} = \left(8 - \frac{2}{5}(12)\right)(0.3)$
$\frac{dc}{dt} = 0.96$ Lempiras por año.

Ejemplo: Un fabricante de cierto producto tiene una función de ingreso $I(x) = 20x - 0.03x^2$ Si las ventas son actualmente 150 unidades y están creciendo a una tasa de 5 unidades por mes. Encontrar la tasa a la que está creciendo el ingreso.

$\frac{dI}{dt} = \frac{dI}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ sabemos que: $x = 150$ y $\frac{dx}{dt} = 5$
$\frac{dI}{dx} = (20 - 0.06x)$
Por tanto: $\frac{dI}{dt} = (20 - 0.06x)(5)$
$\frac{dI}{dt} = (20 - 0.06(150))(5)$
$\frac{dI}{dt} = 55$ Lempiras por mes.

Ejemplo: La ecuación de demanda del producto de una compañía es $2p + x = 300$ en donde x unidades pueden venderse a un precio de p" Lempiras. Si los costos de la compañía son: $C(x) = 225 + 60x$ para producir x unidades cuando la demanda alcanza las 40 unidades y la demanda se incrementa a una tasa de 2 unidades por año. Determinar la tasa a la que está cambiando la utilidad. R:\$\frac{dU}{dt} = 100$ Lempiras por año.

Ingreso Per Cápita.

El ingreso per cápita y de un país es igual al producto nacional bruto s sobre el tamaño de la población p.

$y = \dfrac{s}{p}$

Ejemplo: El producto nacional bruto está aumentando con el tiempo según la formula $s = 100 + t$ en miles de millones de Lempiras. La población en el instante t es: $p = 75 + 2t$ (millones). Hallar la tasa de cambio del ingreso per cápita en el instante t.

$y = \dfrac{s}{p} = \dfrac{100+t}{75+2t}$

Tasa de cambio $= y^1 = \dfrac{(75+2t)(1)-(100+t)(2)}{(75+2t)^2}$

Tasa de cambio $= -\dfrac{125}{(75+2t)^2}$

Derivadas Parciales.

Sea $Z = f(x,y)$ La derivada de Z respecto a x se denota: $Z_x; \frac{dz}{dx}; f_x(x,y)$ Cuando evaluamos la derivada de Z_x las demás variables se mantienen constantes. Así mismo la derivada de Z respecto a y se denota: $Z_y; \frac{dZ}{dy}; f_y(x,y)$ Cuando evaluamos la derivada Z_y las demás variables se mantienen constantes.

Ejemplo: Evaluar en cada función $Z_x; Z_y$

a.) $Z = x^2 + xy + y^2$
$Z_x = 2x + y$
$Z_y = x + 2y$

b.) $Z = x^4 + y^4 + 3x^2y^2$
$Z_x = 4x^3 + 6xy^2$
$Z_y = 4y^3 + 6x^2y$

c.) $Z = (2x+3y)^7$
$Z_x = 7(2x+3y)^6(2)$
$Z_x = 14(2x+3y)^6$
$Z_y = 21(2x+3y)^6$

d.) $Z = ln(x^2+y^2)$
$Z_x = \frac{1}{x^2+y^2}(2x)$
$Z_x = \frac{2x}{x^2+y^2}$
$Z_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$

Productividad Marginal.

La producción total del producto de una empresa depende de un gran número de factores los cuales la empresa a menudo tiene flexibilidad de modificar. Dos de los dos factores más importantes son:

- La cantidad de mano de obra empleada por la empresa.
- El monto del capital invertido en edificios y maquinaria.

Si L representa el número de unidades de mano de obra empleada por la empresa (digamos horas-hombre por año o Lempiras gastados por año en salarios). Y sea K el monto del capital invertido en la planta productiva de la empresa; entonces la producción P por mes de la empresa es una función de L y K. Así: $P = f(L, k)$ esta función se conoce como función de producción de la empresa y L y K son insumos de producción, es decir variables que afectan la producción.

La derivada parcial $\frac{dP}{dL}$ se conoce como la productividad marginal de la mano de obra y mide el incremento en la producción generado por un incremento unitario en la mano de obra cuando el capital se mantiene fijo.

Y la derivada parcial $\frac{dP}{dK}$ se conoce como la productividad marginal del capital; y en forma análoga mide el incremento en la producción generado por el incremento unitario en el capital invertido cuando la mano de obra se mantiene constante.

Ejemplo: La función de producción de cierta empresa está dada por: $P = 5L + 2L^2 + 3LK + 8K + 3K^2$ donde L es la mano de obra empleada en miles de horas–hombre por semana. K el monto del capital invertido medido en miles de Lempiras por semana y P la producción semanal en miles de artículos.

Determinar: Las productividades marginales cuando $L = 5$ y $K = 12$
$P_L = 5 + 4L + 3K$
$P_L(5, 12) = 5 + 4(5) + 3(12)$
$P_L(5, 12) = 61$

$P_K = 3L + 8 + 6K$
$P_K(5, 12) = 3(5) + 8 + 6(12)$
$P_K(5, 12) = 95$

Conclusiones:

- La producción se incrementa en 61,000 artículos semanales por cada 1,000 horas-hombre adicionales de mano de obra empleada cuando el capital se mantiene constante.
- La producción se incrementa en 95,000 artículos por semana por cada 1,000 Lempiras adicionales de incremento en el monto semanal del capital invertido cuando la mano de obra se mantiene constante.

Extremos Locales de una Función.

Se refiere a los valores x, y que dan un máximo o un mínimo de una función.

Procedimiento para obtener los **Extremos Locales de una Función**.

a.) Obtener $Z_x,\ Z_y$

b.) Hacer $Z_x = 0,\ Z_y = 0$

c.) Resolver simultáneamente para x, y

d.) Decidir el extremo local (x, y)

Optimización de Derivadas Parciales.

$f(x, y)$ tiene un máximo local o un mínimo local en el punto (x_0, y_0) si $f_x(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0) = 0$

Teoremas.

Sea (x_0, y_0) un punto critico de la función $f(x, y)$ para lo cual $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ entonces $\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2$

a.) si $f_{xx}(x_0, y_0) < 0; f_{yy}(x_0, y_0) < 0$ y $\Delta(x_0, y_0) > 0$ entonces $f(x, y)$ tiene un máximo en (x_0, y_0).

b.) si $f_{xx}(x_0, y_0) > 0; f_{yy}(x_0, y_0) > 0$ y $\Delta(x_0, y_0) > 0$ entonces $f(x, y)$ tiene un mínimo en (x_0, y_0).

c.) Si $\Delta(x_0, y_0) < 0$ entonces (x_0, y_0) no es extremo local de $f(x, y)$ si no que es un punto silla.

Observaciones:

a.) Si $\Delta(x_0, y_0) = 0$ entonces este teorema no se puede aplicar para decidir sobre máximo o mínimo.

b.) Si $\Delta(x_0, y_0) > 0$ entonces f_{xx} y f_{yy} tienen el mismo signo en (x_0, y_0).

Ejemplo: Sea $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x - 2y$ encontra el extremo local (x, y)

$f_x = 2x + 2y + 2$
$x + y = -1$
$x = -1 - y$
$x = -3$
$f_y = 2x + 4y - 2$

$x + 2y = 1$
$-1 - y + 2y = 1$
$y = 2$ $P.C. = (-, 2)$
$f_{xx} = 2 > 0$
$f_{yy} = 4 > 0$
$f_{xy} = 2 > 0$

$\Delta(x_0, y_0) = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$
$\Delta(-3, 2) = (2)(4) - (2)^2$
$\Delta(-3, 2) = 4 > 0$ por tanto $f(x, y)$ tiene un mínimo local en $(-3, 2)$

Mínimo local: $f(-3, 2) = (-3)^2 + 2(-3)(2) + 2(2)^2 + 2(-3) - 2(2)$
$f(-3, 2) = -5$

Problema: Una empresa utiliza dos tipos de materia prima A, B en su producto usando x unidades de A y y unidades de B. La empresa puede elaborar P unidades del producto con: $P = 0.52x + 0.48y + 0.12xy - 0.07x^2 - 0.06y^2$ si el costo de cada unidad de A es 5.10 Lempiras. Y el costo de cada unidad de B es 1.80 Lempiras. Y la empresa puede vender cada una de las unidades que produce a 15 Lempiras. ¿Qué cantidades de A, B deberá utilizar la empresa para maximizar la utilidad?

Solución: $I(x, y) = Precio \cdot Cantidad$
$I(x, y) = 15(0.52x + 0.48y + 0.12xy - 0.07x^2 - 0.06y^2)$
$I(x, y) = 7.8x + 7.2y + 1.8xy - 1.05x^2 - 0.90y^2; C(x, y) = 5.10x + 1.80y$
$U(x, y) = I(x, y) - C(x, y)$
$U(x, y) = 7.8x + 7.2y + 1.8xy - 1.05x^2 - 0.90y^2 - 5.10x - 1.80y$
$U(x, y) = 2.7x + 5.4y + 1.8xy - 1.05x^2 - 0.90y^2$
$U_x = 2.7 + 1.8y - 2.1x$
$1.8y - 2.1x = -2.7$
$1.8y = 2.1x - 2.7$
$U_y = 5.4 + 1.8x - 1.8y$
$-1.8y + 1.8x = -5.4$
$1.8y = 1.8x + 5.4$
$2.1x - 2.7 = 1.8x + 5.4$
$x = 27; y = 30$
Extremos Locales con Restricción.

Ejemplo: Sea $f(x, y) = 3x + 2y$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 13$ encontrlar los extremos locales.

Planteamos $f(x, y, \delta) = f(x, y) + \delta g(x, y)$
$f(x, y, \delta) = 3x + 2y + \delta(x^2 + y^2 - 13)$
$f_x = 3 + 2\delta x$
$3 + 2\delta x = 0$
$x = \frac{-3}{2\delta}$

$f_y = 2 + 2\delta y$
$2 + 2\delta y = 0$
$y = \frac{-1}{\delta}$
$f_\delta = x^2 + y^2 - 13$
$x^2 + y^2 = 13$
$\left(\frac{-3}{2\delta}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\delta}\right)^2 = 13$
$\frac{9}{4\delta^2} + \frac{1}{\delta^2} = 13$
$9 + 4 = 52\delta^2$
$\delta^2 = \frac{1}{4}\ \delta = \pm\frac{1}{2}$
Si $\delta = \frac{1}{2}$
Entonces: $x = \frac{-3}{2\left(\frac{1}{2}\right)}$ y $y = \frac{-1}{\frac{1}{2}}$
Por tanto: $x = -3$ y $y = -2$

Si $\delta = -\frac{1}{2}$
Entonces: $x = \frac{-3}{2\left(-\frac{1}{2}\right)}$ y $y = \frac{-1}{-\frac{1}{2}}$
Por tanto: $x = 3$ y $y = 2$

Los extremos locales son: $(-3, -2)$ y $(3, 2)$

Ejemplos: Hallar los extremos locales de $Z(x, y) = x^2 + y^2$ sujeta a $2x + 3y = 7$
R:\$\left(\frac{14}{3}, \frac{21}{13}\right)$

Una compañía destina su planta en la elaboración de dos tipos de productos A, B y obtiene una utilidad de 4 Lempiras por unidad de A y 6 Lempiras por unidad de B. Las unidades producidas de los dos tipos de productos están restringidas por la ecuación de transformación de producto: $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$
Donde x unidades de A y y unidades de B se producen en miles por semana. Hallar las cantidades de cada tipo que deben producirse para maximizar la utilidad y la utilidad máxima.
Solución: $U(x, y) = 4x + 6y; g(x) = x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4$
$U(x, y, \delta) = 4x + 6y - \delta(x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4)$
$U(x, y, \delta) = 4x + 6y - \delta x^2 - \delta y^2 - 2\delta x - 4\delta y + 4\delta$
$U_x = 4 - 2\delta x - 2\delta = 0$
$2\delta x + 2\delta = 4$
$2\delta[x + 1] = 4$
$\delta = \frac{2}{x+1}$
$U_y = 6 - 2\delta y - 4\delta = 0$
$2\delta y + 4\delta = 6$
$2\delta[y + 2] = 6$
$\delta = \frac{3}{y+2}$
Entonces: $\frac{2}{x+1} = \frac{3}{y+2}$
$y = \frac{3x-1}{2}$ y $U_\delta = -x^2 - y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$
Por tanto: $x^2 + \left(\frac{3x-1}{2}\right)^2 + 2x + 4\left(\frac{3x-1}{2}\right) - 4 = 0$
Reduciendo a: $13x^2 + 26x - 23 = 0$
Aplicando formulas cuadrática: $x = \frac{-26\pm\sqrt{(26)^2-4(13)(-23)}}{2(13)}$

$x = \frac{-26 \pm \sqrt{1872}}{26}$
$x = \frac{-26 \pm 43.27}{26}$
$x = 0.664$
$y = \frac{3(0.664)-1}{2}$
$y = 0.496$
$y = 0.496 \times 1000$
$x = 0.664 \times 1000$
$x = 664$ unidades y $y = 496$ unidades.
$U(664, 496) = 4(664) + 6(496)$
$U_{max} = 5632$ Lempiras.

2. Álgebra Matricial y Aplicaciones

2.1. Vectores.

Se define un vector como un conjunto ordenado ya sea en forma de renglón o de columna.

Vector Renglón de N Componentes o N-Dimensional.
Es un conjunto ordenado de “n” números escritos de la siguiente forma: $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$
donde:
x_1: es la primera componente
x_2: es la segunda componente
x_3: es la tercera componente
x_n: es la enésima componente
Ejemplos:
$(30, 10, 28)$ es un vector renglón de 3 componentes.
$(12, 0, 3.28, -4)$ es un vector renglón de 4 componentes.

Vector Columna de N Componentes o N-Dimensional.
Es un conjunto ordenado de "n"números escritos de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{donde:} \quad \begin{array}{ll} x_1: & \text{primera componente} \\ x_2: & \text{segunda componente} \\ x_3: & \text{tercera componente} \\ x_n: & \text{enesima componente} \end{array}$$

Ejemplos:

$\begin{bmatrix} 24 \\ 50 \\ 86 \end{bmatrix}$ es un vector columna de 3 componentes.

$\begin{bmatrix} -2 \\ \frac{5}{8} \\ 45 \\ 0 \end{bmatrix}$ es un vector columna de 4 componentes.

Cualquier vector con todos sus componentes igual a cero se llama vector cero.

Ejemplo: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ es un vector renglón cero de 4 componentes.
Notación de Vectores.
Los vectores se denotan con letras minúsculas, con fuerte sombreado así: **a, b, c, ..., u, v, w etc.**
El vector cero se denota con **0**

Ejemplo: El administrador de una planta manufacturera compro: 10 unidades de acero, 30 unidades de aluminio, 50 unidades de aceite y 15 unidades de papel. Se pide ordenar estas compras con un vector renglón y un vector columna.

Vector columna: $\begin{array}{c} acero \\ aluminio \\ aceite \\ papel \end{array} \begin{bmatrix} 10 \\ 30 \\ 50 \\ 15 \end{bmatrix}$ Vector renglón: $\begin{array}{cccc} \text{acero} & \text{aluminio} & \text{aceite} & \text{papel} \end{array}$ $\begin{bmatrix} 10 & 30 & 50 & 15 \end{bmatrix}$

2.2. Operaciones con Vectores.

A continuación se presentan algunas de las operaciones mas comunes con vectores.

Igualdad de Vectores.

Dos vectores **a** y **b** son iguales si son vectores renglón o columna y además si tienen el mismo número de componentes y sus componentes correspondientes son iguales. Así:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Entonces $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ si y solo si $a_1 = b_1; a_2 = b_2; \ldots; a_n = b_n$

Ejemplo: En cada par de vectores determinar el valor de las variables para que los vectores sean iguales.

a.) $\begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{2}x + 1 & 5 + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7y - 10 \end{bmatrix}$

$$3 = 3 \qquad -\frac{1}{2}x + 1 = 4 \qquad 5 + 2y = 7y - 10$$

$$-\frac{1}{2}x = 3 \qquad -5y = -15$$

$$x = -6 \qquad y = 3$$

b.) $\begin{bmatrix} 2x \\ y^2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x + 4 \\ 4y \\ 3z - 12 \end{bmatrix}$

$$2x = \frac{2}{3}x + 4 \qquad y^2 = 4y \qquad \frac{1}{2} = 3z - 12$$

$$\frac{4}{3}x = 4 \qquad y^2 - 4y = 0 \qquad \text{-}3z = -\frac{25}{2}$$

$$x = 3 \qquad y = (0, 4) \qquad z = \frac{25}{6}$$

Suma de Vectores.

Dos vectores se pueden sumar si son vector renglón o vector columna y además si tienen el mismo número de componentes. Así: Sean los vectores

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

Significa que para sumar vectores, se suman los componentes correspondientes.

Ejemplo: Sean los vectores: $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -6 \\ 15 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 18 \\ 30 \\ -4 \end{bmatrix}$ efectuar:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 15 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18 \\ 30 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 10 - 6 + 18 \\ 8 + 15 + 30 \\ 7 + 3 - 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 22 \\ 53 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Sean los vectores $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 14 & -10 & 5 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -20 & 30 & -5 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -12 & 4 & -9 \end{bmatrix}$

Efectuar:

$$\mathbf{a} - \mathbf{c} - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 14 & -10 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -12 & 4 & -9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -20 & 30 & -5 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{a}-\mathbf{c}-\mathbf{b}=\begin{bmatrix}14+12+20 & -10-4-30 & 5+9+5\end{bmatrix}$
$\mathbf{a}-\mathbf{c}-\mathbf{b}=\begin{bmatrix}46 & -44 & 19\end{bmatrix}$

Las sumas:

$\begin{bmatrix}4\\-1\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3\\6\\10\\8\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}8\\12\\-7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 5 & -2\end{bmatrix}$ **NO** están definidas.

Multiplicación de un Vector por un Escalar.

Cuando trabajamos con vectores nos referimos a los números como escalares, de modo que un escalar es un número. Para multiplicar un escalar por un vector se multiplica el escalar por cada componente del vector. Así:

Sea $\mathbf{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$ y sea α un escalar entonces: $\alpha a=\alpha\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha a_1\\\alpha a_2\\\vdots\\\alpha a_n\end{bmatrix}$

Ejemplo: Sea $\mathbf{a}=\begin{bmatrix}38\\40\\50\\5\end{bmatrix}$ efectuar:

$$-4\mathbf{a}=-4\begin{bmatrix}38\\40\\50\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4(38)\\-4(40)\\-4(50)\\-4(5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-152\\-160\\-200\\-20\end{bmatrix}$$

$$\tfrac{5}{2}\mathbf{a}=\tfrac{5}{2}\begin{bmatrix}38\\40\\50\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}95\\100\\125\\\frac{25}{2}\end{bmatrix}$$

Sea el vector: $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}14\\-10\\8\\-\frac{3}{8}\end{bmatrix}$ efectuar:

$$0.3\mathbf{v}=0.3\begin{bmatrix}14\\-10\\8\\-\frac{3}{8}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4.2\\-3\\2.4\\-0.1125\end{bmatrix}$$

Sean los vectores: $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \\ -10 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 30 \\ -15 \\ 5 \end{bmatrix}$; $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \\ -3 \end{bmatrix}$

Efectuar:

$2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$

Hallar un vector $\mathbf{v}$ tal que: $2\mathbf{b} - 3\mathbf{a} + 2\mathbf{v} = 5\mathbf{c}$

Producto Escalar de dos Vectores.

Dados dos vectores con componentes: $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

Entonces el producto escalar de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ se representa $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ y se define: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + ... + a_n \cdot b_n$

Este producto es conocido como *producto punto* y su resultado es un escalar. Para multiplicar dos vectores es necesario que ambos tengan el mismo número de componentes.

Ejemplo: sean los vectores $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$; $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 12 \end{bmatrix}$; $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$ efectuar:

a.) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

b.) $\frac{1}{2}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

c.) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

d.) $3\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

Solución:

a.) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = 6(-5) + 4(7) + 8(2) = -30 + 28 + 16 = 14$

b.) $\frac{1}{2}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = -15 + 14 + 8 = 7$

c.) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} = 10(6) + 4(4) + 12(9) = 60 + 16 + 108 = 184$

d.) $3\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = 3\begin{bmatrix}6\\4\\9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}10 & 4 & 12\end{bmatrix} = \ldots$

Ejemplo: Un fabricante produce 4 artículos y la demanda para los artículos esta dada por el vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}30 & 20 & 40 & 10\end{bmatrix}$ los precios unitarios para los artículos están dados por el vector $\mathbf{y} = \begin{bmatrix}5 & 15 & 10 & 8\end{bmatrix}$ Sí el productor satisface su demanda ¿Cuánto dinero recibirá?
$Ingreso = \mathbf{y}\cdot\mathbf{x} = \begin{bmatrix}5 & 15 & 10 & 8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}30 & 20 & 40 & 10\end{bmatrix}$
$Ingreso = 5(30) + 15(20) + 10(40) + 8(10)$
$Ingreso = 930$ Lempiras.

Si el precio unitario se incrementa en un 20 % cual será su nuevo ingreso. $Ingreso = 1.2\begin{bmatrix}5 & 15 & 10 & 8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}30 & 20 & 40 & 10\end{bmatrix}$
$Ingreso = \begin{bmatrix}6 & 18 & 12 & 9.6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}30 & 20 & 40 & 10\end{bmatrix}$
$Ingreso = 6(30) + 18(20) + 12(40) + 9.6(10)$
$Ingreso = 1,116$ Lempiras.

Ejemplo: Una compañía produce diariamente sombreros, gorras y boinas en dos fabricas distintas. En la fábrica numero 1 produce 50 sombreros, 80 gorras y 60 boinas. En la fabrica numero 2 produce 100 sombreros, 40 gorras y 30 boinas se pide:

a.) Ordenar la producción de cada fabrica con un vector columna.

b.) Cuanta cantidad de cada producto produce la compañía diariamente.

c.) Cuanta cantidad de cada producto produce la compañía mensualmente.

Solución:

a.) $\begin{array}{c} Fabrica\ 1 \\ sombreros \\ gorras \\ boinas \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix}50\\80\\60\end{bmatrix}\end{array} \quad \begin{array}{c} Fabrica\ 2 \\ sombreros \\ gorras \\ boinas \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix}100\\40\\30\end{bmatrix}\end{array}$

b.) $F_1 + F_2 = \begin{bmatrix}50\\80\\60\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}100\\40\\30\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}150\\120\\90\end{bmatrix}$

c.) $30(F_1 + F_2) = 30\begin{bmatrix}150\\120\\90\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\,500\\3\,600\\2\,700\end{bmatrix}$

2.3. Matrices.

Una matriz es un arreglo rectangular de $m \times n$ números distribuidos en un orden de m renglones y n columnas.

Las matrices se representan con letras mayúsculas así:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \qquad m \times n\text{: es el tamaño (orden o dimensión) de la matriz.}$$

El elemento a_{21} significa que se encuentra en el segundo renglón y la primera columna.

El elemento a_{m2} significa que se encuentra en el eme-simo renglón y la segunda columna.

Adicionalmente es importante familiarizarse con los conceptos de diagonales principal y secundaria. La diagonal principal de una matriz cuadrada esta formada por los elementos a_{ij} para los cuales $i = j$; es decir los elementos que van desde la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha. Y la diagonal secundaria de una matriz cuadrada (también llamada antidiagonal de una matriz) es el conjunto de elementos que van desde la esquina superior derecha a la esquina inferior izquierda. Los elementos de esta diagonal tienen la peculiaridad que la suma de sus índices es siempre $n + 1$.

Ejemplos de Matrices.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 5 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}_{3\times 2} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Ejercicio:

Sea: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 7 \\ -3 & 9 & 2 & 10 \\ 8 & 14 & 6 & 30 \end{bmatrix}$

Identificar las diagonales principal y secundaria, así como los componentes: a_{23}, a_{33}, a_{42}, a_{34}, a_{13}, a_{32}, a_{31} y a_{41}.

Solución:
Los componentes de la diagonal principal son: $3, 1, 2, 30$ y los de la diagonal secundaria: $4, 0, 9, 8$
En tanto que los componentes solicitados son: $a_{23} = 0 \quad a_{33} = 2 \quad a_{42} = 14 \quad a_{34} = 10$
$a_{13} = -1 \quad a_{32} = 9 \quad a_{31} = -3 \quad a_{41} = 8$

2.4. Algunos Tipos de Matrices.

A continuación se presentan algunos tipos de matrices.

Matriz Cuadrada.

Es aquella matriz donde el número de renglones es igual al numero de columnas. Mientras que las que no son cuadradas se llaman rectangulares. Como el número de filas y de columnas es igual, para este tipo de matrices es común indicar el orden con un solo número. Por ejemplo el respectivo orden de las siguientes matrices es 2 y 3.

Ejemplos: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -11 & 3 & -6 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

Matrices Fila y Columna.

Una matriz fila (o vector fila) es una matriz $1 \times n$. Una matriz columna (o vector columna) es una matriz $n \times 1$. Por ejemplo, la matriz A es una matriz fila y la matriz B es una matriz columna.

$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad$ y $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

Matriz Diagonal.

Es una matriz cuadrada donde todas las componentes que no están en la diagonal principal son cero. Los elementos de la diagonal principal pueden o no ser ceros. Es decir se cumple la condición $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

Matriz Triangular Superior.

Es una matriz cuadrada donde todas las componentes por debajo de la diagonal principal son cero.

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

Matriz Triangular Inferior.

Es una matriz cuadrada donde todas las componentes que están por arriba de la diagonal principal son cero.

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

Observación: La matriz diagonal es a la vez una matriz triangular superior e inferior.

Matriz Identidad.

Es una matriz cuadrada donde todas las componentes de la diagonal principal son uno y cero las demás componentes.

Ejemplo: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad ; \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

Matriz Nula.

Es una matriz donde todas sus componentes son cero.

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

Matriz Transpuesta.

Sea $A = a_{ij}$ una matriz de tamaño $m \times n$ entonces la matriz transpuesta de A se representa A^t de tamaño $n \times m$ y se obtiene intercambiando los renglones por columnas y las columnas por renglones.

Ejemplos: Sean $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & -7 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

Encontrar: A^t y B^t
Solución:

$$A^t = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \\ -2 & -7 \end{bmatrix}_{3\times 2} \quad ; \quad B^t = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

2.5. Operaciones con Matrices.

Entre las operaciones con matrices, podemos describir las siguientes:

Igualdad de Matrices.

Dos matrices A y B son iguales si son del mismo tamaño y sus componentes correspondientes son iguales.

Ejemplo: Hallar el valor de las variables para que las matrices sean iguales.

$\begin{bmatrix} 4 & x & 3 \\ y & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y-1 & 2-x & 3 \\ 5 & z+1 & w \end{bmatrix}$

Solución:

$4 = y - 1$ $\quad$ $x = 2 - x$ $\quad$ $3 = 3$

$y = 5$ $\quad$ $x = 1$

$y = 5$ $\quad$ -1 $= z + 1$ $\quad$ $2 = w$

$z = -2$ $\quad$ $w = 2$

Suma de Matrices.

Dos matrices se pueden sumar si son del mismo tamaño. Para sumar matrices se suman los componentes correspondientes.

Ejemplos:

Sean: $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ -9 & 15 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 5 & -12 & -6 \end{bmatrix}$ Encontrar $A + B$

$$A + B = \begin{bmatrix} 3+10 & 6+8 & 7+2 \\ -9+5 & 15-12 & 4-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 14 & 9 \\ -4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Sean las matrices: $A = \begin{bmatrix} 6 & -10 & -9 \\ -1 & 4 & 18 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 4 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$

Efectuar: $A + B^t - C$

$$A + B^t - C = \begin{bmatrix} 6 & -10 & -9 \\ -1 & 4 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$A + B^t - C = \begin{bmatrix} 6+13-2 & -10+4-5 & -9-2-4 \\ -1+5+1 & 4+3-3 & 18+7+6 \end{bmatrix}$$

$$A + B^t - C = \begin{bmatrix} 17 & -11 & -15 \\ 5 & 4 & 31 \end{bmatrix}$$

Multiplicación de una Matriz por un Escalar.

Para multiplicar una matriz por un escalar, se multiplica el escalar por cada componente de la matriz.

Ejemplo: Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 20 \\ 3 & 12 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ efectuar: $-4A$ y $0.5A$

$$-4A = -4\begin{bmatrix} -2 & 6 & 20 \\ 3 & 12 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -24 & -80 \\ -12 & -48 & -16 \\ -20 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$0.5A = 0.5\begin{bmatrix} -2 & 6 & 20 \\ 3 & 12 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 10 \\ 1.5 & 6 & 2 \\ 2.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

O si se prefiere la notación de fracciones: $\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 6 & 20 \\ 3 & 12 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 10 \\ \frac{3}{2} & 6 & 2 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

Sean las matrices: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & 10 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ efectuar:

a.) $2A - \frac{1}{3}B^t$

b.) $\frac{1}{2}B + 3A^t$

Solución:

a.) $2A - \frac{1}{3}B^t = 2\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & 10 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & -3 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

$$2A - \frac{1}{3}B^t = 2\begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 8 & 12 & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-5}{3} & 1 & -3 \\ \frac{-2}{3} & \frac{-4}{3} & -2 \end{bmatrix}$$

$$2A - \frac{1}{3}B^t = 2\begin{bmatrix} \frac{13}{3} & 5 & -5 \\ \frac{22}{3} & \frac{32}{3} & 18 \end{bmatrix}$$

b.) $\frac{1}{2}B + 3A^t = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}$

$$\frac{1}{2}B + 3A^t = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ \frac{-3}{2} & 2 \\ \frac{9}{2} & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 6 & 18 \\ -3 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}B + 3A^t = \begin{bmatrix} \frac{23}{2} & 13 \\ \frac{9}{2} & 20 \\ \frac{3}{2} & 33 \end{bmatrix}$$

Una compañía produce diariamente bloques de 6, 7 y 8 pulgadas con dos maquinas en dos plantas distintas, una planta en La Ceiba y la otra en Jutiapa. Según las matrices.

Planta de La Ceiba Planta de Jutiapa

$$\begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 6" & 7" & 8" \end{array} \\ \begin{bmatrix} 36 & 40 & 60 \\ 28 & 52 & 46 \end{bmatrix} \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 6" & 7" & 8" \end{array} \\ \begin{bmatrix} 60 & 48 & 54 \\ 90 & 50 & 80 \end{bmatrix} \end{array}$$

Determinar la producción total de la compañía.

$$P_1 + P_2 = \begin{bmatrix} 36 & 40 & 60 \\ 28 & 52 & 46 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 60 & 48 & 54 \\ 90 & 50 & 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96 & 88 & 114 \\ 118 & 102 & 126 \end{bmatrix}$$

Si la producción en La Ceiba se incrementa en un 30 % y en Jutiapa baja un 10 % ¿Cuál es la nueva producción diaria total de la compañía?

$$1.3P_1 + 0.9P_2 = 1.3\begin{bmatrix} 36 & 40 & 60 \\ 28 & 52 & 46 \end{bmatrix} + 0.9\begin{bmatrix} 60 & 48 & 54 \\ 90 & 50 & 80 \end{bmatrix}$$

$$1.3P_1 + 0.9P_2 = \begin{bmatrix} 46.8 & 52 & 78 \\ 36.4 & 67.6 & 59.8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 54 & 43.2 & 48.6 \\ 81 & 45 & 72 \end{bmatrix}$$

$$1.3P_1 + 0.9P_2 = \begin{bmatrix} 100.8 & 95.2 & 126.6 \\ 117.4 & 112.6 & 131.8 \end{bmatrix}$$

Multiplicación de Matrices.

Dos matrices se pueden multiplicar si el numero de columnas de la primera es igual al número de renglones de la segunda. Así: $A_{m\times n} \times B_{n\times r} = C_{m\times r}$ Es decir, que el componente de la posición ij de la nueva matriz se obtiene de multiplicar la fila i de la matriz A por la columna j de la matriz B. En otras palabras, dicho componente es el producto escalar del vector renglón **i** de la matriz A por el vector columna **j** de la matriz B.

Ejemplo: Sean las matrices: $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 10 & -1 \\ 3 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ Efectuar:

a.) $A \times B$

b.) $B \times A$

c.) $2A \times B$

d.) $B \times A^t$

Solución:

a.) $A \times B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 10 & -1 \\ 3 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 4(2)+3(3)+2(0) & 4(10)+3(7)+2(1) & 4(-1)+3(-2)+2(4) \\ 5(2)+(-2)(3)+6(0) & 5(10)+(-2)(7)+6(1) & 5(-1)+(-2)(-2)+6(4) \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 17 & 63 & -2 \\ 4 & 42 & 23 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

b.) $B \times A =$ No se puede realizar porque el número de columnas de la primer matriz (B) no es igual al número de filas de la segunda (A).

c.) $2A \times B =$ para desarrollar por su cuenta.

d.) $$B \times A^t = \begin{bmatrix} 2 & 10 & -1 \\ 3 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B \times A^t = \begin{bmatrix} 2(4)+10(3)+(-1) & 2(5)+10(-2)+(-1)(6) \\ 3(4)+7(3)+(-2)(2) & 3(5)+7(-2)+(-2)(6) \\ 0(4)+1(3)+4(2) & 0(5)+1(-2)+4(6) \end{bmatrix}$$

$$B \times A^t = \begin{bmatrix} 36 & -16 \\ 29 & -11 \\ 11 & 22 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

2.6. Determinante de una Matriz.

Cada matriz cuadrada A tiene asociado un número real (escalar) llamado determinante de A, que se representa por $|A|$ o $Det(A)$. No vamos a profundizar en una definición explícita de determinante, basta con indicar que mediante este escalar se puede identificar muchas propiedades matemáticas aplicables a diferentes campos. Sin embargo agregaremos que el concepto de determinante o de "volumen orientado" fue introducido para estudiar el número de soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales. Por tanto conocer el determinante de una matriz es muy importante.

Para el cálculo de determinantes de matrices de cualquier orden, existen varios métodos, uno de ellos conocido como teorema de Laplace, es una regla recursiva que reduce el cálculo a sumas y restas de varios determinantes de un orden inferior. Este proceso se puede repetir tantas veces como sea necesario hasta reducir el problema al cálculo de múltiples determinantes de orden tan pequeño como se quiera. Sabiendo que el determinante de un escalar es el propio escalar; de esta manera, es posible calcular el determinante de cualquier matriz aplicando dicho teorema.

Otro método para calcular determinantes de matrices de cualquier orden, parte de otra definición de determinante conocida como Fórmula de Leibniz. La fórmula de Leibniz es útil como definición de determinante; pero, excepto en casos muy pequeños, no es una forma práctica de calcularlo.

Por tanto, a continuación nos enfocaremos en como calcular los **determinantes de matri-**

ces de orden inferior (1, 2, 3) para los cuales se comparten las siguientes formulas y más adelante se discutira brevemente el teorema de Laplace, para el calculo de determinantes de cualquier orden (aunque a medida se incrementa el tamaño de la matriz, la complejidad del calculo crece de manera factorial). Por tanto la explicación del teorema de Laplace se comprobará con una matriz de orden 3.

Sea A una matriz cuadrada de orden 1, el determinante de A se representa así: $|A|$ o $Det(A)$ y es un escalar (el unico elemento de la matriz).

En tanto que el determinante de una matriz de orden 2, como $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ se obtiene mediante la siguiente formula: $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ es decir la diferencia entre el producto de la diagonal principal y el de la diagonal secundaria.

Pero si la matriz es de orden 3, como $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Su determinante se obtiene mediante la formula denominada **Regla de Sarrus**, que aunque a continuación se les presenta resumida:
$|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$

En realidad consiste en repetir abajo de la matriz las primeras dos filas de la misma (o repetir a la derecha las primeras dos columnas); luego sumar los productos de la diagonal principal (y de las paralelas a esta) de la matriz y restar los productos de la diagonal secundaria (y de las paralelas a esta), así:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Llegando al mismo enunciado: $|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$

Ejemplos: Obtener el determinante de las matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} => \; |A| = 5(3) - 6(4) = 15 - 24 = -9$$

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} => \; |B| = -3(6) - (-2)(9) = -18 - (-18) = 0$$

$$2+\ 12+\ 48 = 62$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix} => \; |C| = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{matrix} => \; |C| = 32 - 62 = -30$$

$$8+\ 12+\ 12 = 32$$

8 +45 -63 = -10

$$D = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 7 & 2 & -1 \\ 4 & -9 & 3 \end{bmatrix} => \ |D| = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 7 & 2 & -1 \\ 4 & -9 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 & -3 \\ 7 & 2 \\ 4 & -9 \end{matrix} => \ |D| = -21 - (-10) = -11$$

30+12 -63 = -21

Ahora se presenta una breve explicación del **teorema de Laplace**, para lo cual es necesario conocer un par de conceptos: menor complementario y adjunto (o cofactor) de un elemento.

Partiendo de una matriz cuadrada: A, de orden n, se llama *menor complementario* del elemento a_{ij} al determinante de la matriz cuadrada de orden $n-1$ que resulta de eliminar de la matriz A la fila i y la columna j.

En tanto que se llama *adjunto (o cofactor)* del elemento a_{ij} a su menor complementario anteponiendo el signo $+$ si $i+j$ es par y el signo $-$ si $i+j$ es impar.

Lo que se puede resumir y expresar con mayor elegancia de la siguiente manera:

$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Donde C_{ij} es el adjunto (o cofactor) del elemento a_{ij} y M_{ij} es el menor del mismo elemento a_{ij}.

Así que según Laplace, el valor del determinante de una matriz es la suma de productos de los elementos de una fila (o columna) por sus adjuntos correspondientes.

En la siguiente demostración recuerden que una forma de representar el determinante de una matriz es mediante barras verticales (|).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Recuerden que para calcular el determinante de una matriz, según Laplace, se multiplica cada elemento de una fila o columna (en este caso usamos la primer fila) por el adjunto de cada uno de los componentes de dicha fila, así:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Desarrollando los determinantes de 2×2 por la Regla de Sarrus o aplicando recursivamente el teorema de Laplace, tenemos:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Que realizando las multiplicaciones y reordenando terminos, llegamos al mismo resultado de la Regla de Sarrus:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Para finalizar, esta explicación de Laplace, se desarrolla el siguiente ejemplo:

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 2[(-1)(-4)-(3)(2)]-(-3)[(4)(-4)-(2)(-2)]+1[(4)(3)-(-1)(-2)]$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 2[4-6] + 3[-16+4] + [12-2] = -4 - 36 + 10 = -30$$

Más ejercicios sobre estos temas:

Encontrar el valor de la o las variables, para que el determinante de la matriz sea el indicado.

$$A = \begin{bmatrix} 3x-7 & -6 \\ x & 2-x \end{bmatrix} \quad |A| = 14$$

Solución:

$$|A| = \begin{bmatrix} 3x-7 & -6 \\ x & 2-x \end{bmatrix} = (3x-7)(2-x)-(-6)(x) = 6x-3x^2-14+7x+6x = -3x^2+19x-14$$

Entonces $|A| = -3x^2 + 19x - 14$ y por tanto $-3x^2 + 19x - 14 = 14$

Así que $-3x^2 + 19x - 28 = 0$ y aplicando la cuadratica tenemos que $x = 4$ o $x = \frac{7}{3}$

Los otros dos, quedan para terminar en clase o en sus casas.

$$B = \begin{bmatrix} x+1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & x+2 \\ 3 & -4 & x-3 \end{bmatrix} \quad |B| = 10$$

$$C = \begin{bmatrix} x+9 & x+1 \\ x-8 & -3 \end{bmatrix} \quad |C| = -16$$

2.7. Matriz Inversa.

En el algebra lineal, una matriz A de tamaño $n \times n$ se dice que es invertible, no singular, no degenerada o regular, si existe otra matriz cuadrada de orden n, llamada *matriz inversa* de A denotada por A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ Donde I es la matriz identidad de orden n y el $\cdot$ indica el producto de matrices cubierto previamente.

Al proceso de encontrar la inversa de una matriz dada se le conoce como *inversión de matrices* y hay varios métodos, pero podemos dividirlos en dos tipos: métodos numéricos y métodos analíticos. Estos últimos consisten en aprovechar algunas de las características de las matrices inversas. En tanto que los métodos numéricos, se basan en aplicar repetitivamente operaciones elementales sobre la matriz A, hasta llegar a la matriz identidad o en su defecto a la conclusión que la matriz A no tiene inversa.

A continuación discutiremos el método numérico conocido como **método de Gauss-Jordan** para encontrar la matriz inversa de A.

Sea A una matriz cuadrada entonces:

1.) Ampliar A con la matriz identidad $[\ A \mid I\ ]$

2.) Efectuar operaciones elementales sobre los renglones de A para llevarla a la Identidad.

3.) Decidir si A tiene inversa. A tiene inversa si su forma escalonada por renglones reducida es la identidad. Es decir, si luego de aplicar las operaciones elementales sobre renglones se llega a: $[\ I \mid A^{-1}\ ]$. Si por el contrario no se puede llegar a esta forma, entonces A no tiene inversa.

Nota: Las operaciones elementales sobre los renglones, son tres: intercambiar renglones, multiplicar un renglón por un escalar diferente de *CERO* y sumar un múltiplo escalar de un renglón a otro. Hay muchas nomenclaturas pero optamos por usar: $\xrightarrow{R_i \leftrightarrow R_j}$ para denotar el intercambio del renglón i por el renglón j. Para indicar la multiplicación de un escalar k por un renglón i usamos: $\xrightarrow{R_i \to kR_i}$ o de manera abreviada $\xrightarrow{kR_i}$ y para sumar un múltiplo escalar de un renglón a otro: $\xrightarrow{R_i \to R_i + kR_j}$ o de manera abreviada $\xrightarrow{R_i + kR_j}$

Ejemplo: Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ encontrar su inversa utilizando el método de Gauss-Jordan.

Empezamos ampliando la matriz original A con la matriz identidad del mismo orden que A y aplicamos las operaciones elementales mostradas con la nomenclatura previamente compartida:

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 3 & -6 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & -2 & \frac{1}{3} & 0 \\ -2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + 2R_1} \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & -2 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 3 & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 + 2R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{7}{9} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Por tanto $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Ejemplo: Encontrar B^{-1} si $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Solución:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + (-4)R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 + (-3)R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 + 5R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{11}{6} & -\frac{5}{3} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-1R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 + (-2)R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + (-2)R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{3} & -\frac{11}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{3} & -\frac{11}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{array}\right]$$

Por tanto $B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} & -1 \\ \frac{13}{3} & -\frac{11}{3} & 2 \\ -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{bmatrix}$

Como se dijo previamente, *los métodos analíticos* consisten en aprovechar algunas de las características de las matrices inversas. Una de dichas características es que $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot Adj(A)$ Osea que la inversa de una matriz se puede obtener multiplicando el inverso multiplicativo (o recíproco) del determinante de la matriz original por la matriz adjunta (o matriz transpuesta de cofactores).

Para comprender mejor este enunciado se introducen nuevos conceptos y se repasan algunos de los que se cubrieron en el apartado sobre determinantes. Empezaremos con la *matriz adjunta*, la cual se define como la matriz transpuesta de los cofactores de la matriz original.

Recordemos que el cofactor (o adjunto) de un elemento se obtiene al multiplicar su menor complementario por $+$ si la suma de los subindices es par y por $-$ si dicha suma es impar. A su vez, el menor complementario del elemento a_{ij} es el determinante de la matriz cuadrada de orden $n-1$ que resulta de eliminar de la matriz original la fila i y la columna j.

Pero pongamoslo todo en acción para reforzar los conceptos discutidos, mediante los siguientes ejercicios:

Sea $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ encontrar los siguientes menores: M_{21}, M_{13}, M_{32} y M_{23}

$M_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = -3 - 8 = -11$

$M_{13} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 6 - 1 = 5$

$M_{32} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = -4 - 12 = -16$

$M_{23} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = -4 + 1 = -3$

Ahora para la misma matriz A encontrar los siguientes cofactores: C_{21}, C_{13}, C_{32} y C_{23}

$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = (-1)^3(-3-8) = -1(-11) = 11$

$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = (-1)^4(6-1) = (1)(5) = 5$

$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = (-1)^5(-4-12) = 16$

$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = (-1)^5(-4+1) = 3$

Antes de realizar un calculo completo de la matriz inversa por el método recién discutido, es oportuno notar que si el determinante de la matriz es igual a 0, llegamos a una división entre 0 y por lo tanto se puede concluir que la matriz no es invertible (o que no tiene inversa). En esa misma linea de pensamiento, esto quiere decir que tampoco con el método numérico de Gauss-Jordan podríamos encontrar la matriz inversa, porque la matriz no es invertible. Por tanto, para matrices de orden inferior, antes de aplicar el método de Gauss-Jordan es conveniente encontrar el determinante de la matríz para evitar trabajo en vano. Dicho esto, se procede a encontrar la inversa de una matriz, mediante este método analítico.

Ejemplo: Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ encontrar su inversa.

Primero se procede a calcular el determinante:

$|A| = 21 - 12 = 9$

Ahora se obtiene los cofactores, que permitiran elaborar la matriz que denominaremos B, así:

$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (7) = 7$
$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-2) = 2$
$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-6) = 6$
$C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (3) = 3$

$B = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

Y por tanto, la matriz adjunta de A es:

$Adj(A) = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Así que la matriz inversa de A es:

$A^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Ejemplo: Encontrar B^{-1} si $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Tal como en el ejemplo anterior, se procede primero a obtener el determinante, para saber si la matriz es invertible. En esta ocasión usaremos el teorema de Laplace, para lo cual se calculan los cofactores, de en este caso, la primer fila:

$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (1)[-10 - 6] = -16$

$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-1)[-8 - 18] = 26$

$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (1)[4 - 15] = -11$

Y el determinante es:

$|B| = 2(-16) + 4(26) + 6(-11) = -32 + 104 - 66 = 6$ y como $6 \neq 0$ la matriz es invertible.

Y se procede a calcular el resto de los cofactores para poder formar la matriz de cofactores y que luego su transpuesta nos brinde la matriz adjunta.

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)[-8-6] = 14$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (1)[-4-18] = -22$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)[2-12] = 10$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (1)[24-30] = -6$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = (-1)[12-24] = 12$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (1)[10-16] = -6$$

$$Adj(B) = \begin{bmatrix} -16 & 26 & -11 \\ 14 & -22 & 10 \\ -6 & 12 & -6 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -16 & 14 & -6 \\ 26 & -22 & 12 \\ -11 & 10 & -6 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot Adj(B) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -16 & 14 & -6 \\ 26 & -22 & 12 \\ -11 & 10 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-8}{3} & \frac{7}{3} & -1 \\ \frac{13}{3} & \frac{-11}{3} & 2 \\ \frac{-11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{bmatrix}$$

Antes de finalizar este apartado, se puede observar que ambas matrices inversas ya se habían obtenido con el método de Gauss y el resultado fue identico.

2.8. Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales mediante álgrebra lineal.

Un sistema de ecuaciones lineales, también conocido como sistema lineal de ecuaciones o simplemente sistema lineal, es un conjunto de ecuaciones lineales (es decir, un sistema de ecuaciones en donde cada ecuación es de primer grado), definidas sobre un cuerpo o un anillo conmutativo. Es decir, un conjunto de m ecuaciones en n variables, que en su forma normal se puede escribir así:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & + & \dots & + \cdots + & \dots & = & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Que se puede reescribir en notación matricial, separando los coeficientes de las variables como sigue:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Es oportuno repasar (tal como se cubrio en la unidad anterior), que en base a las posibles soluciones de este tipo de sistemas, estos se clasifican en: sistemas compatibles determinados, sistemas compatibles indeterminados y sistemas incompatibles. Es decir, que el sistema tenga una única respuesta (un punto del plano cartesiano), que el sistema no tenga una única respuesta (existen infinitas soluciones) o que el sistema no tenga solución (las rectas no se cruzan). Si el determinante, de la matriz de coeficientes es diferente de 0, entonces el sistema es compatible determinado. Si fuese igual a 0, necesitaríamos mas pruebas para conocer si el sistema es compatible indeterminado o incompatible.

A continuación compartiremos, 3 de los métodos más comunes para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales. Los primeros dos métodos parten de agregar el vector de términos independites a la matriz de coeficientes.

El método de *eliminación de Gauss, eliminación Gaussiana o simplemente método de Gauss* consiste en mediante operaciones o transformaciones elementales sobre renglones, convertir un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas, en uno escalonado (o matriz triangular), en el que la primera ecuación tiene n incógnitas, la segunda ecuación tiene $n-1$ incógnitas, ..., y la última ecuación, tiene 1 incógnita. De esta forma, será fácil partir de la última ecuación; en la que para obtener el valor de la variable hay que realizar cuanto mucho un despeje o división, e ir subiendo para calcular el valor de las demás incógnitas, en un proceso conocido como *sustitución regresiva*. Es decir, en la fila antepenúltima habrán dos variables, pero ya conoceremos el valor de una de ellas, por lo tanto podremos inferir fácilmente el valor de la otra y así sucesivamente.

Una variante de este método, denominada *eliminación de Gauss-Jordan*, consiste en, mediante transformaciones elementales, obtener una matriz diagonal. Es decir, en cada fila hay una ecuación de una sola incógnita, cuyo valor será fácilmente deducible (mediante un despeje o multiplicación/división). Incluso siguiendo las transformaciones elementales se pude llegar hasta la matriz identidad con lo que se obtendría la respuesta final sin necesidad de despejes; pero que implicaría mas transformaciones elementales.

Las operaciones o transformaciones elementales a que hacen referencia ambos métodos, son las mismas explicadas en la sección sobre *matriz inversa*. Es decir: intercambiar renglones, multiplicar un renglón por un escalar diferente de CERO y sumar un múltiplo escalar de un renglón a otro.

Antes de demostrar estos métodos mediante ejemplos, finalicemos la explicación del último método que cubriremos en clase, el que se conoce como *Regla de Cramer*. En realidad es un teorema del álgebra lineal que da la solución de un sistema lineal de ecuaciones en términos de determinantes. Pero que para poder aplicarlo el sistema debe cumplir las siguientes condiciones:

- El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas (la matriz es cuadrada).
- El determinante de la matriz de coeficientes (del sistema) es distinto de cero: $|A| \neq 0$.

Si se cumplen estas condiciones, los valores de las variables se obtienen mediante:

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|}$$

Donde x_j es una de las variables $x_1, \ldots, x_n$ y A_j es la matriz resultante de reemplazar la j-ésima columna de A por el vector de términos independientes.

Una vez compartida la explicación de estos métodos se procede a verlos en acción mediante los siguientes ejemplos. En los que se parte de los casos mas sencillos (matrices de orden 2) para posteriormente desarrollar otro con una matriz de orden 3.

Ejemplo: Resolver el sistema.

$$\begin{cases} \text{2x} & + & \text{5y} & = & \text{-4} \\ \text{3x} & + & \text{y} & = & 7 \end{cases}$$

El primer paso, para cualquiera de los métodos, es identificar la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Luego para los primeros dos métodos (el de Gauss y el de Gauss-Jordan) se escribe la matriz aumentada (la matriz de coeficientes separada por una linea vertical del vector de términos independientes), para empezar a realizar las operaciones elementales sobre la misma hasta llegar a una matriz escalonada según el primer método o hasta la matriz identidad según el segundo.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{2} & -2 \\ 3 & 1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + (-3)R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{2} & -2 \\ 0 & \frac{-13}{2} & 13 \end{array}\right]$$

Como ya se tiene una matriz escalonada, entonces de acuerdo al método de Gauss, con esto es suficiente para obtener la respuesta; faltando únicamente despejar para encontrar el valor de y y luego mediante sustitución regresiva encontrar el valor de la otra variable, así:

$\frac{-13}{2}y = 13$ por tanto: $-13y = 26$ y $y = -2$

Ahora tenemos: $x + \frac{5}{2}(-2) = -2$ que da $x + (-5) = -2$ dando $x = 5 - 2$ osea $x = 3$

En tanto, que con el método Gauss-Jordan se continua con las operaciones elementales hasta llegar a la matriz diagonal, así:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{2} & -2 \\ 0 & \frac{-13}{2} & 13 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{-2}{13}R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 + \frac{-5}{2}R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Con lo que se obtiene la misma respuesta, sin la necesidad de despejes o sustituciones. Es decir: $x = 3$ y $y = -2$

Ahora se procede a resolverlo mediante la Regla de Cramer, para lo cual se parte de obtener el determinante de la matriz de coeficientes, si este es diferente de 0, proseguimos a calcular directamente las respuestas, pero si es 0 entonces se concluye que el sistema no tiene solución.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ y $|A| = 2(1) - 5(3) = -13$

que al ser diferente que 0, indica que la matriz (como ya lo sabiamos) tiene una única solución. Por lo tanto, el siguiente paso es formar las matrices que sustituyen la columna de una variable por el vector de términos independientes, para posteriormente calcular sus respectivos determinantes que nos permitiran obtener las soluciones del sistema.

$A_x = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ $A_y = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

Y sus determinantes son:

$|A_x| = -4(1) - (5)(7) = -4 - 35 = -39$ y $|A_y| = 2(7) - (-4)(3) = 14 + 12 = 26$

Finalmente las soluciones del sistema se obtienen mediante:

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|}$$

Osea:

$$x = \frac{-39}{-13} = 3 \quad \text{y } y = \frac{26}{-13} = -2$$

Las mismas respuestas que se obtuvieron con los métodos anteriores!!

Ahora un ejemplo con una matriz de orden 3; siempre utilizando los tres métodos, pero reduciendo un poco la explicación para evitar ser redundante.

$$\begin{cases} \text{x} + \text{y} + \text{z} = 2 \\ \text{x} - \text{y} + 3\text{z} = 12 \\ 2\text{x} + 5\text{y} + 2\text{z} = -2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 12 \\ 2 & 5 & 2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + (-1)R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 10 \\ 2 & 5 & 2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 + (-2)R_1}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{-1}{2}R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 + (-3)R_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right]$$

Como ya se llego a una matriz escalonada, se puede proceder a encontrar las soluciones del sistema (de hecho, hace un par de operaciones elementales se pudo haber parado aunque no se contaba con una matriz triangular, pero era factible deducir la solución).

En fin, la solución parte de que en la última fila de la matriz se tiene:

$3z = 9$ por lo tanto $z = 3$

Aplicando sustitución regresiva:

$y - z = -5$
$y - 3 = -5$
$y = -2$

Y finalmente:

$x + y + z = 2$
$x + (-2) + 3 = 2$
$x = 2 + 2 - 3$
$x = 1$

En cambio que con el método Gauss-Jordan, se siguen realizando operacions elementales:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}R_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 + (-1)R_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + R_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 + (-2)R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$ es decir, se llega a la misma respuesta.

Ahora mediante a Regla de Cramer, partiendo del determinante:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (-2-15)-(2-6)+(5-(-1)(2)) = -17+4+7 = -6$$

Ahora se forman las matrices al intercambiar la columna de cada variable por el vector de términos independientes:

$$A_x = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 12 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad A_y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 12 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad A_z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 12 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Se obtienen sus respectivos determinantes:

$$|A_x| = 2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 12 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 2(-2-15)-(24-(-6))+(60-(-1)(-2)) = -34-30+58 = -6$$

$$|A_y| = 1\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (24-(3)(-2))-2(2-6)+(-2-(12)(2)) = 30+8+-26 = 12$$

$$|A_z| = 1\begin{vmatrix} -1 & 12 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 12 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (2-60)-(-2-24)+2(5-(-1)(2)) = -58+26+14 = -18$$

Y ahora a calcular las soluciones del sistema de ecuaciones:

$x = \frac{-6}{-6} = 1$

$y = \frac{12}{-6} = -2$

$z = \frac{-18}{-6} = 3$

Se finaliza esta sección compartiendo algunos ejercicios.

Ejercicio #1. Las ecuaciones de Oferta y Demanda para un producto están dadas por: $-3x + 7p = 56$; $5x + 3p = 200$ en donde p es el precio del producto y x la cantidad. Encontrar la cantidad y el precio de equilibrio de mercado.
Solución:

$$\begin{cases} \text{-3x} & + & \text{7p} & = & 56 \\ \text{5x} & + & \text{3p} & = & 200 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 56 \\ 200 \end{bmatrix}$$

$|A| = -9 - 35 = -44$

$$A_x = \begin{bmatrix} 56 & 7 \\ 200 & 3 \end{bmatrix} \quad A_p = \begin{bmatrix} -3 & 56 \\ 5 & 200 \end{bmatrix}$$

$|A_x| = 168 - 1400 = -1232$ y $|A_p| = -600 - 280 = -880$

$x = \dfrac{-1232}{-44} = 28$ y $p = \dfrac{-880}{-44} = 20$

Por lo tanto el $PE = (28, 20)$

Ejercicio #2. Una planta de fertilizantes produce 3 tipos de fertilizantes. El tipo A contiene 25 % de Potasio, 45 % de Nitrato y 30 % de Fosfato. El tipo B contiene 15 % de Potasio, 50 % de Nitrato y 35 % de Fosfato. El tipo C no contiene Potasio, tiene 75 % de Nitrato y 25 % de Fosfato. La planta tiene suministros de 1.5 toneladas diarias de Potasio, 5 toneladas de Nitrato y 3 toneladas de Fosfato al día. ¿Qué cantidades de cada tipo de fertilizante debe producir de modo que agote los suministros de ingredientes?

Solución: Se recomienda crear una tabla como la siguiente o al menos resumir los datos del problema.

Nutriente	A	B	C	Suministros diarios
P	0.25	0.15	0.00	1.5
N	0.45	0.50	0.75	5.0
F	0.30	0.35	0.25	3.0

Luego en base a esta tabla, que por cierto en la cual se pudieron haber intercambiado las filas por las columnas, construir el sistema de ecuaciones, que al desarrollarlo contesta la pregunta que se nos formula.

$$\begin{cases} 0.25\text{A} & + & 0.15\text{B} & + & 0\text{C} & = & 1.5 \\ 0.45\text{A} & - & 0.50\text{B} & + & 0.75\text{C} & = & 5 \\ 0.30\text{A} & + & 0.35\text{B} & + & 0.25\text{C} & = & 3 \end{cases}$$ o transformandolo a fracciones:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}A & + & \frac{3}{20}B & + & 0C & = & \frac{3}{2} \\ \frac{9}{20}A & + & \frac{1}{2}B & + & \frac{3}{4}C & = & 5 \\ \frac{3}{10}A & + & \frac{7}{20}B & + & \frac{1}{4}C & = & 3 \end{cases}$$

Sin embargo, trabajar con decimales o fracciones, resulta algo complicado para algunos, por lo que nos podemos valer del MCD para simplificarlo y obtener:

$$\begin{cases} 5A & + & 3B & + & 0C & = & 30 \\ 9A & + & 10B & + & 15 & = & 100 \\ 6A & + & 7B & + & 5C & = & 60 \end{cases}$$

Parte de la dificultad del ejercicio radicaba en esta formulación inicial, así que no se desarrollará toda la solución pero se comparten los pasos iniciales. En ese sentido, se calcula el determinante de la matriz de coeficientes para saber si el ejercicio tiene solución. Se utiliza Z para nombrar esta matriz y así evitar confunciones. Es decir:

$$Z = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 9 & 10 & 15 \\ 6 & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 30 \\ 100 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$|Z| = 5\begin{vmatrix} 10 & 15 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 9 & 15 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 5(50-105) - 3(45-90) + 0(63-60) = -275+135+0$$

$$|Z| = -140$$

$$Z_C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 30 \\ 9 & 10 & 100 \\ 6 & 7 & 60 \end{bmatrix}$$

$$|Z_C| = 5\begin{vmatrix} 10 & 100 \\ 7 & 60 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 9 & 100 \\ 6 & 60 \end{vmatrix} + 30\begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 5(600-700) - 3(540-600) + 30(63-60)$$

$$|Z_C| = -500 + 180 + 90 = -230$$

Por tanto, $C = \dfrac{-230}{-140} = \dfrac{23}{14}$

Con este método de Cramer, el ejercicio lo dejaremos ahí para aprovechar y resaltar que si solo nos interesa el valor de una variable, este es el método a utilizar ya que con unos pocos calculos obtenemos dicho valor, algo que no se podría hacer fácilmente con los otros métodos presentados previamente. Sin embargo, se comparten unos pasos comunes a dichos métodos a continuación:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 0 & 30 \\ 9 & 10 & 15 & 100 \\ 6 & 7 & 5 & 60 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{5}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{5} & 0 & 6 \\ 9 & 10 & 15 & 100 \\ 6 & 7 & 5 & 60 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + (-9)R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{5} & 0 & 6 \\ 0 & \frac{23}{5} & 15 & 46 \\ 6 & 7 & 5 & 60 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 + (-6)R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{5} & 0 & 6 \\ 0 & \frac{23}{5} & 15 & 46 \\ 0 & \frac{17}{5} & 5 & 24 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{5}{23}R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{5} & 0 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{75}{23} & 10 \\ 0 & \frac{17}{5} & 5 & 24 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 + (\frac{-17}{5})R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{5} & 0 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{75}{23} & 10 \\ 0 & 0 & \frac{-140}{23} & -10 \end{array}\right]$$

Por tanto, de acuerdo al método de eliminación de Gauss, se puede encontrar el valor de C simplificando la siguiente proposición:

$$\frac{-140}{23}C = -10$$
$$C = \frac{23}{14}$$

Luego encontrar el valor de las otras variables o se puede optar por seguir haciendo operaciones elementales hasta llegar a la matriz identidad (como dice el método de Gauss-Jordan). Pero ambas cosas quedan para que las practiquen por su cuenta.

3. Progresiones e Introducción a la Programación Lineal y sus Aplicaciones

3.1. Progresiones.

En matemáticas una progresión es una sucesión de números entre los cuales hay una ley de formación constante. Es decir, existe una relación entre un término y su sucesor y predecesor; dicho de otra manera conociendo un término y la relación existente, se puede calcular el siguiente término (o el anterior). Se distinguen dos tipos de progresiones:

- Progresiones Aritméticas
- Progresiones Geométricas

3.2. Progresiones Aritméticas (PA).

Una progresión es aritmética si cada término después del primero se obtiene sumándole un valor común al término precedente. Es decir, que la diferencia de dos terminos sucesivos cualquiera, es una constante. A esta constante se le conoce como *diferencia de la progresión*, simplemente *diferencia* o *distancia*.

Ejemplos:

1.) 2, 4, 6, 8 el valor común es 2 y el enésimo término es: $a_n = 2n$

2.) 5, 12, 19, 26, 33 la diferencia común es 7 y el enésimo término es: $a_n = 7n - 2$

No siempre es fácil ver cuál es el enésimo término de una progresión aritmética, por tanto se comparte y demuestra la siguiente formula general que hace fácil conocer la relación entre

los términos. Así:
Sea a_n el enésimo término y d la diferencia común, entonces los cuatro primeros términos son:

1^{er} *término*.................a_1
2^{do} *término*.................$a_2 = a_1 + d$
3^{er} *término*.................$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$
4^{to} *término*.................$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2_d + d = a_1 + 3_d$

Como se puede observar, al ir obtenindo el siguiente término simplemente se le va agregando la distancia al término anterior, por tanto para el término n, el coeficiente de d es $n-1$ entonces la formula general para obtener un término de una progresión aritmética se calcula por:

$a_n = a_1 + (n-1)d$

Ejemplo 1:
Obtener el enésimo, el onceavo y el octavo término de la progresión aritmética: $11, 2, -7...$
Solución:
En este caso se puede observar que $a_1 = 11$ y $a_2 = 2$ por substracción se tiene que $d = -9$, de modo que:
$a_n = 11 + (n-1)(-9)$
$a_n = 11 - 9n + 9$
$a_n = 20 - 9n$
Por tanto el onceavo término es:
$a_{11} = 20 - 9(11)$
$a_{11} = -79$
y el octavo:
$a_8 = 20 - 9(8)$
$a_8 = -52$

Ejemplo 2: Calcular el cuadragésimo (a_{40}) término de una progresión aritmética en la que $a_1 = -15$ y $a_5 = 13$
$a_n = a_1 + (n-1)d$
$13 = -15 + (5-1)d$
$13 = -15 + 4d$
$d = 7$
$a_{40} = -15 + (40-1)(7)$
$a_{40} = -15 + 39(7)$
$a_{40} = 258$

En este ejemplo, así como puede pasar en muchos otros casos, no se conocía el valor de d; pero sí se conocía el valor del primer término y de otro cualquiera de la progresión (el quinto) así como su ubicación dentro de la progresión. Lo que se hizo fue obtener d al utilizar la formula que nos permite obtener un elemento cualquiera; en este caso se usaron los datos que se conocían y se llego a que $d = 7$.

Alternativamente, podemos realizar un simple despeje de la fórmula:

$a_n = a_1 + (n-1)d$

Obteniendo la siguiente fórmula:

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

Por lo tantos para los datos del ejercicio, tendríamos: $d = \dfrac{13-(-15)}{5-1}$

$$d = \frac{28}{4} = 7$$

Esto se puede generalizar al caso en que se conoce el valor de dos términos cualquiera de la progresión y su ubicación dentro de la misma, en cuyo caso la fórmula sería:

$$d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$$

Ejemplo 3: Si el primer término de una progresión aritmética es 2 y el sexto es 12 ¿Cuál es la distancia de esta progresión?
Solución:
$d = \frac{12-2}{6-1}$
$d = 2$

Ejemplo 4: Si el segundo término de una progresión aritmética es 12 y el quinto es 33 ¿Cuál es la distancia de esta progresión?
Solución:

$d = \frac{33-12}{5-2}$
$d = \frac{21}{3}$
$d = 7$

Ejercicios propuestos:
Calcular lo que se le piede de las siguientes progresiones aritméticas:

1.) 3, 7, 11, 15, ... $a_{10} =?$ R: 39

2.) 5, 3, 1, -1, ... $a_7 =?$ R: -7

3.) 72, 70, 68, 66, ... $a_n =?$ R: $74 - 2n$

4.) Si $a_1 = 4$ y $a_5 = 9$ .... $a_8 =?$ R: 51/4

5.) Si $a_5 = 19$ y $a_{11} = 43$ ...... $d =?$ $R : 4$

6.) Si $a_3 = 31$ y $a_{10} = 17$ ...... $d =?$

3.2.1. Medias Aritméticas.

Recordemos que una media aritmética (también conocida solo como promedio o media) es el valor resultante de dividir la sumatoria de un conjunto de datos entre el número total de datos.

Las medias aritméticas se relacionan con las progresiones aritméticas en el sentido que al tomar 3 terminos consecutivos de una progresión aritmética, automáticamente el término de en medio es la media de los extremos. Conociendo esto, podemos combinar lo que hemos aprendido sobre progresiones aritméticas y realizar algo que se conoce como interpolar medias aritméticas, es decir introducir valores entre dos extremos creando una progresión aritmética. Lo cual tiene diversas aplicaciones como por ejemplo calcular la cantidad de postes necesarios para cercar una propiedad.

Ejemplo 1: Introduzca 4 medias aritméticas entre 5 y 20
Solución:
Se necesitan los números m_1, m_2, m_3, m_4 para que $5, m_1, m_2, m_3, m_4, 20$ sea una progresión aritmética. Para calcular dichos números ocupamos conocer la diferencia "d". Los datos que tenemos son:
$a_1 = 5, a_n = 20$ y usando la lógica podemos concluir que $n = 6$; esto se debe a que luego de introducir las medias aritméticas el 20 será el termino 6. Con lo que podemos usar la fórmula:
$a_n = a_1 + (n-1)d$
Y por tanto tenemos:
$20 = 5 + 5d$
$d = 3$
Así que las medias son: 8, 11, 14 y 17 y la progresión aritmética: 5, 8, 11, 14, 17, 20.

Ejercicio: Introducir 6 medias aritméticas entre -4 y 31

3.2.2. Suma de n Términos de una Progresión Aritmética.

Nada nos impide sumar los términos de una progresión aritmética de la manera tradicional (uno por uno); pero esto puede resultar tedioso para progresiones grandes. Por tanto, se comparte la siguiente fórmula para la suma de n términos de una progresión aritmética con primer término a_1 y diferencia común d que está dada por:
$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$ o $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + l)$ donde l es el ultimo término.

Ejemplo 1: Calcular la suma de los primeros 20 términos de la progresión aritmética: $2, 5, 8, 11, 14, ..., n_{20}$

Aquí: $d = 3$ y $a_1 = 2$ por tanto:
$S_{20} = \frac{20}{2}[2(2) + 19(3)]$
$S_{20} = 10(61)$
$S_{20} = 610$

Ejemplo 2: Calcular la suma de los primeros 10,000 términos de la progresión aritmética que comienza con: $246, 261, 276, ..., a_{10,000}$
Solución:
$S_{10,000} = \frac{10,000}{2}[2(246) + (9999)15]$
$S_{10,000} = 5000[492 + 149,985]$
$S_{10,000} = 752,385,000$

Ejemplo 3: Calcular la suma en la progresión aritmética: $15, 17, 19, 21, ..., 55$
Aquí hay que calcular primero la posición del último número mostrado (55) y después la suma.
$a_n = a_1 + (n-1)d$
$a_n = 55; a_1 = 15; d = 2$
$55 = 15 + (n-1)(2)$
$55 = 15 + 2n - 2$
$2n = 42$
$n = 21$
Conociendo el valor de n se procede a utilizar la fórmula previamente compartida:
$S_n = \dfrac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$
$S_{21} = \frac{21}{2}[2(15) + (21-1)2]$
$S_{21} = 10.5[30 + 40]$
$S_{21} = 10.5[70]$
$S_{21} = 735$

Para este ejercicio, alternativamente se puede utilizar la otra formula (que se mira más fácil pero es porque no volvemos a calcular el valor de n), así:
$S_{21} = \frac{21}{2}(15 + 55)$
$S_{21} = 10.5[70]$
$S_{21} = 735$

Ejercicios Propuestos.

Si cada una de las siguientes sucesiones es una progresión aritmética, calcular su suma.

1.) 1, 4, 7, 10, ... Sumar 30 términos. R: 1,335

2.) 70, 68, 66, ... Sumar 15 términos. R: 840

3.) 51, 48, 45, 42, ...Sumar 18 términos R: 414

4.) 2, 7, 12, 17, ... Sumar hasta el n-término R: $\frac{n(5n-1)}{2}$

3.2.3. Ejemplos de la aplicación de las Progresiones Aritméticas.

1.) Se hace un préstamo por 6,000 Lempiras a corto plazo y que se debe pagar en 12 cuotas mensuales iguales, más el 3 % mensual de interés por saldos insolutos. El pago de cada mes se hace durante la primera semana del mes siguiente.

a.) Escriba el termino general de la sucesión que expresa el saldo mensual.

b.) Calcular el interés de cada uno de los primeros 3 meses.

c.) El interés total pagado.

d.) La tasa de interés anual.

Solución:

a.) Los pagos iguales del préstamo son $6,000 \div 12 = 500$ y como los pagos se hacen durante la primera semana del mes siguiente el termino general de la sucesión es:
$a_n = 6000 - 500(n-1)$ donde: $n = 1, 2, 3, ..., 12$

b.) Interés mensual:
1er mes ... 6,000 (0.03) = 180
2do mes ... 5,500 (0.03) = 165
3er mes ... 5,000 (0.03) = 150
Así que el pago por interés es una progresión aritmética con $a_1 = 180$ y $d = 15$
De modo que el pago mensual por interés es:
$[6000 - 500(n-1)]0.03 => 180 - 15(n-1) => a_n = 195 - 15n$
$\uparrow \qquad\qquad \uparrow$
Saldo mensual · tasa mensual

c.) El interés total pagado es:
$I = S_{12} = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$
$I = \frac{12}{2}[2(180) + (12-1)(-15)]$
$I = 6[360 - 165]$
$I = 1,170$ Lempiras

d.) Tasa de interés anual $= \frac{1,170}{6,000} = 19.5\,\%$

2.) Un individuo está de acuerdo en pagar una deuda libre de interés de 5,800 Lempiras en cierto número de pagos. Cada uno de ellos empezando por el segundo debe exceder al anterior en 20 Lempiras. Sí el primer pago es de 100 Lempiras. ¿Calcular cuántos pagos se deberán efectuar para finiquitar la deuda?
Solución:
Dado que el primer pago es de 100 Lempiras y el pago sub-siguiente se incrementa en 20 Lempiras, los pagos son: 100, 120, 140, ...,
Entonces: $a_1 = 100$, $d = 20$, n=numero de pagos y la suma de los n-pagos debe ser igual a 5,800 Lempiras. Entonces:
$S_n = 5,800$ y recordemos que $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$
Entonces, $5,800 = \frac{n}{2}[2(100) + (n-1)(20)]$
$11,600 = n(200 + 20n - 20)$
$n^2 + 9n - 580 = 0$
$(n+29)(n-20) = 0$ —>Por factorización $n = -29$ o $n = 20$
De modo que se deberán efectuar 20 pagos para finiquitar la deuda.

3.) Una empresa instala una maquina con un costo de 1,700 Lempiras. El valor de la maquina se deprecia anualmente en 150 Lempiras. Determinar:

a.) Una expresión para el valor de la maquina después de n años.

b.) Si el valor de desecho es de 200 Lempiras. ¿Cuál es el tiempo de vida útil de la maquina?

Solución:

a.) Ya que la maquina se deprecia 150 Lempiras por año, su valor al termino del:
1er año es 1700-150=1550
2do año es 1550-150=1400
3er año es 1400-150=1250
Lo cual es una progresión aritmética con $a_1 = 1,550$, $d = -150$ entonces el n-esimo termino es: $T_n = a_1 + (n-1)d$
$T_n = 1550 + (n-1)(-150)$
$T_n = 1700 - 150n$

b.) Puesto que estamos interesados en el valor de n cuando se haya reducido al valor de desecho entonces: $T_n = 200$
Por tanto:
$200 = 1,700 - 150n$
$150n = 1,500$
$n = 10$ años.

4.) A menudo el método de depreciación lineal es inapropiado, porque el bien en cuestión pierde mucho más valor durante el primer o segundo año que en años posteriores. Un método alternativo es el de *suma de los dígitos de los años*. Sea N la vida útil del bien y d la depreciación durante el año N (esto es, durante el último año). Según este método el monto de depreciación durante el año $(N-1)$ es $2d$; durante el año $(N-2)$, $3d$, y así sucesivamente, por lo que la depreciación durante el primer año es Nd. Muestre que la depreciación durante el año n es $(N-n-1)d$, $(n = 1, 2, ..., N)$, y que la depreciación total durante los N años es $D = 12N(N+1)d$. (En la práctica D debe ser igual a [costo inicial - valor de desecho después de N años]; por tanto, d está bien determinado).

5.) Un préstamo de 12,000 Lempiras se paga en 12 abonos mensuales iguales. La tasa de interés es del 2 % mensual sobre saldos insolutos. Calcular:

a.) El pago mensual de interés en cada uno de los primeros 3 meses. (R: 240, 220, 200).

b.) Deducir el termino general de la progresión que expresa el saldo mensual y el interés mensual. (R: Saldo Mensual $= 12000 - 1000(n-1)$, Interés Mensual: $a_n = 260 - 20n$).

c.) Calcular el interés total. (R: 1,560 Lempiras)

d.) La tasa de interés anual. (R: 13 %)

3.3. Progresión Geométrica (PG).

Una sucesión de términos se dice que están en una progresión geométrica, si la razón de cada término, al término anterior es una constante. Esta razón constante se denomina razón común de la progresión.
Ejemplos: La sucesión: 2, 6, 18, 54, 162 es una progresión geométrica porque $6 \div 2 = 3$, $18 \div 6 = 3$, $54 \div 18 = 3$, etc. La razón común es: 3.
La Sucesión: $\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{24}$ es una progresión geométrica y la razón común es: $-\frac{1}{2}$
Cada término de una progresión geométrica, se obtiene multiplicando al anterior por la razón común.
En general sí a es el primer término y r es la razón común entonces: a, ar, ar^2, ar^3, ... es una progresión geométrica.
En esta progresión se observa que la potencia de r en cualquier termino es uno menos que el número del término. Por tanto el n-esimo termino esta dado Por:
$T_n = ar^{n-1}$
Si la siguiente sucesión es una progresión geométrica, obtener el n-esimo termino y el séptimo de: 2, 6, 18, 54, ...
Aquí $a = 2$, $r = 3$ así que:
$T_n = ar^{n-1}$
$T_n = 2(3)^{n-1}$
Y para el séptimo termino: $T_7 = 2(3)^{7-1}$
$T_7 = 2(3)^6$
$T_7 = 1,458$

Ejemplo #1: Se conoce que el segundo y tercer término de una progresión geométrica son: -6 y 12 respectivamente. Determine el sexto y el n-ésimo término.
Solución:
Para calcular r, como solo hay dos terminos y son sucesivos, basta con dividir el término de mayor posición en este caso 12, entre el término de menor posición en este caso -6, por lo tanto $r = -2$ y con esto se procede a buscar el valor de a, utilizando la fórmula arriba descrita y despejando, para cualquiera de los dos términos, por ejemplo: $T_2 = a(-2)^{2-1}$ $=> -6 = a(-2) => a = \frac{-6}{-2} = 3$ Conociendo a y r, se tiene que:
$T_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$ y por tanto el sexto término es:
$T_6 = 3 \cdot (-2)^{6-1} => T_6 = -96$

Ejemplo #2: Los términos cuarto y noveno de una progresión geométrica son: $\frac{1}{2}$ y $\frac{16}{243}$. Determine el sexto término.
Solución:
Sea a el primer término y r la razón constante de la progresión geométrica. Entonces, usando nuestros valores dados, tenemos que:
$T_4 = ar^{4-1} => T_4 = ar^3 = \frac{1}{2}$ y por un procedimiento similar $T_9 = ar^8 = \frac{16}{243}$
Ahora si dividimos la segunda ecuación entre la primera y despejamos para r tenemos:
$$\frac{ar^8}{ar^3} = \frac{\frac{16}{243}}{\frac{1}{2}}$$
Aplicando ley de exponentes, eliminación y simplifiación se obtiene:

$r^5 = \frac{32}{243}$ y aplicando raíz quinta en ambos lados se obtiene:
$r = \frac{2}{3}$
Solamente falta encontrar el valor de a; afortunadamente es cuestión de sustituir en la ecuación de cualquiera de los términos que conocemos, por ejemplo:
$T_4 = ar^{4-1}$ =>$T_4 = ar^3 = \frac{1}{2}$ =>$a(\frac{2}{3})^3 = \frac{1}{2}$ por tanto,
$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{27}{8} = \frac{27}{16}$ y finalmente el T_6 es:
$T_6 = ar^5 = \frac{27}{16}\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{27}{16} \cdot \frac{32}{243} = \frac{2}{9}$

Ejemplo #3: De una PG Se conoce que $a = 2$ y $r = 3$, también que el número 486 es parte de dicha progresión. Determine que posición ocupa este número en esta PG.

Solución:

Empezamos sustituyendo los datos que conocemos en la formula general para encontrar un término dado de una PG, así:
$T_n = ar^{n-1}$
$T_n = 486$ ó
$486 = 2(3)^{n-1}$ <- simplificando
$243 = 3^{n-1}$ <- como no podemos aplicar una raíz que no conocemos, entonces intentemos con logaritmos.
$\log_3 243 = \log_3 3^{(n-1)}$ <- se utilizo la base 3, por conveniencia, pero se puede utilizar el logaritmo común o el natural (aunque se pueda tener que cambiar de base).
$\log_3 243 = (n-1)\log_3 3$ <- finalmente al aplicar leyes de logaritmos y simplificar.
$\log_3 3^5 + 1 = n$
$5 + 1 = n$
$n = 6$
Por lo tanto la posición que ocupa es la sexta, aquí esta la comprobación:
$T_6 = 2 \cdot 3^{6-1} = 486$

Ejercicios Propuestos.

Calcular el n-esimo y el noveno término de la sucesiones:

1.) 3, 6, 12, 24, ... (R: 768)

2.) $\frac{2}{9}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \ldots$ (R: $\frac{2}{9}\left(\frac{-3}{2}\right)^{n-1}$)

3.3.1. Suma de n Términos de una Progresión Geométrica.

En luegar de sumar los términos uno por uno y si a es el primer término y r es la razón común de una progresión geométrica entonces la suma S_n de los n términos de la progresión esta dada por:

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ sí $r < 1$ y

$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ sí $r > 1$ y finalmente, como se puede deducir

$S_n = an \qquad$ sí $r = 1$
Ejemplo: Si la siguiente sucesión es una progresión geométrica, calcular la suma de los primeros 10 términos de la misma: 2, -4, 8, -16, ...
Aquí: $a = 2$ y $r = -2$
Por tanto:

$$S_{10} = \frac{2(1-(-2)^{10})}{1-(-2)} \Rightarrow S_{10} = \frac{2(1-1024)}{1+2} \Rightarrow S_{10} = \frac{-2046}{3} \Rightarrow S_{10} = -682$$

3.3.2. Suma de un Progresión Geométrica Infinita.

En matemáticas financieras, las PG infinitas ocurren en algunas situaciones que incluyen perpetuidad. Un ejemplo sería una anualidad que continúa de manera indefinida.

Por ejemplo: $a + ar + ar^2 + ...$

Entonces la suma de sus términos esta dada por:
$S = \dfrac{a}{1-r}$ siempre que: $-1 < r < 1$

Por ejemplo calcule la suma de la sucesión: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$

Aquí:
$a = 1$ y $r = -\frac{1}{3}$ por tanto,

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

3.3.3. Ejemplos de la aplicación de las Progresiones Geométricas.

Calcular lo que se le solicita, sí las siguientes sucesiones son progresiones geométricas.

1.) 2, 6, 18, 54, ... Sumar 12 términos. (R: 531,440)

2.) 1, 2, 4, 8, ... Sumar n términos (R:$2^n - 1$)

3.) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...$ Sumar todos los términos. (R: 2)

4.) Cada año una persona invierte 1,000 Lempiras en un plan de ahorro del cual percibe intereses a una tasa del 8 % anual ¿Cuál es el valor de este plan de ahorro al décimo aniversario de la primera inversión?. (R: 16,645 Lempiras.)

5.) Una persona invierte 4,000 Lempiras a plazo fijo a una tasa de interés del 6 % anual con capitalizaciones mensuales. Calcular su valor. (R: 5,081.96 Lempiras.)

6.) Una maquina se deprecia anualmente a una tasa del 10 % de su valor. El costo original fue de 10,000 Lempiras y el valor de desecho de 5,314.41 Lempiras. Calcular la vida efectiva de la máquina. (R: 6 años.)

7.) Una persona hipoteca su casa que deberá pagar en un plazo de 5 años, en este entonces la deuda será de 19,500 Lempiras. Esta persona planea guardar cierta cantidad cada mes que invertirá en una cuenta de ahorros que paga intereses a una tasa de anual del 9 % con capitalizaciones mensuales. La primera inversión la hará de inmediato y la última (la número 61) la hará en la fecha de pago de la hipoteca. ¿Cuánto deberá guardar cada mes? Sí tiene que pagar la hipoteca por completo.

4. Ejercicios Propuestos

4.1. Primer Unidad.

1. Para cada función determinar si representa una curva de demanda, oferta o si no tiene sentido económico. Siendo p el precio y x la cantidad. Es posible que deba manipular la ecuación para poder llegar a una conclusión (como encontrar la forma explicita) y trazar la grafica (preferiblemente encontrando los interceptos).

   1.1) $p - 0.4x = 10$

   1.2) $p + 3x - 20 = 0$

   1.3) $3p + 2x = -30$

   1.4) $4p - 80 - 5x = 0$

   1.5) $5p - x = 90$

   1.6) $15p + x = 60$

   1.7) $p + 50 + 2x = 0$

   1.8) $2p - 600 + \frac{1}{4}x = 0$

2. Resolver los siguientes problemas. **TODOS deben incluir GRAFICAS**.

   2.1) Un fabricante de detergentes encuentra que las ventas son de 10,000 paquetes a la semana cuando el precio es de L. 1.20 por paquete. Pero que las ventas se incrementan a 12,000 paquetes a la semana cuando el precio se reduce a L. 1.10 por paquete. Determinar la ecuación lineal de demanda y graficar.

   2.2) Un comerciante sabe que puede vender 3,000 huevos a la semana a un precio de L. 2.00 el huevo. Mientras que solo vende 2,000 a un precio de L. 2.50. Determinar la ecuación lineal de demanda y graficar.

   2.3) Un agricultor sabe que puede vender 1,160 libras de tomate a la semana a un precio de L. 3.79 la libra, pero que si rebaja la libra en 20 centavos, el puede vender 1,340 libras a la semana. Hallar la ecuación lineal de demanda. ¿Cuantas libras podría vender a un precio de L. 3.29 la libra?

2.4) Un granjero puede vender 4,000 libras de pollo por semana a un precio de L. 20.00 la libra. Pero si rebaja el precio en un 10 % puede vender 6,000 libras. Hallar:
a.) La ecuación lineal de demanda
b.) ¿Cuantas libras podría vender a la semana a un precio de L. 16.50?

2.5) A un precio de L. 10.00 la unidad una compañía proveerá 1,200 unidades de su producto y a L. 15.00 por unidad proveerá 4,200 unidades. Determinar la ecuación lineal de oferta. Graficar.

2.6) A un precio de L. 30 se venden 25 unidades, en tanto que a un precio de L. 14 solo se venden 5. Determinar la ecuación lineal de la oferta y graficar.

2.7) Un comerciante ofrece 8,000 camisetas al mes a un precio de 4 dolares la camiseta y ofrece 14,000 camisetas a un precio de 5.50 dolares. Hallar:
a.) La ecuación lineal de oferta
b.) ¿A qué precio ofrecería 10,000 camisetas?

2.8) Una compañía va a entregar 5,000 linternas al mes a un precio de L. 5.00 por unidad y a un precio de L. 3.50 ofrece 2,000 linternas. Encontrar:
a.) La ecuación lineal de oferta.
b.) ¿A qué precio no ofrecería linternas?

2.9) El costo variable de fabricar una mesa es de 7 dolares y los costos fijos son de 150 dolares al día. Encontrar:
a.) La ecuación lineal de costo
b.) El costo de fabricar 100 mesas.
c.) Graficar

2.10) El costo de fabricar 100 lámparas a la semana es de 700 dolares y el costo de fabricar 120 lámparas a la semana es de 800 dolares. Hallar la función lineal de costo. ¿Cuáles son los costos fijos y cuales son los costos variables?

2.11) A una compañía le cuesta 75 dolares producir 10 unidades de su producto y le cuesta 120 dolares producir 25 unidades del mismo. Determinar:
a.) La ecuación de costo lineal
b.) ¿Cuál es el costo de producir 20 unidades?
c.) ¿Cuál es el costo variable por unidad?

2.12) Los costos fijos por producir cierto artículo son de L. 300.00 a la semana. Y los costos totales para producir 20 unidades son L. 410.00. Hallar:
a.) La ecuación lineal de costo al producir "x" artículos.
b.) ¿El costo de fabricar 30 unidades?

2.13) El costo de un boleto de autobús depende directamente de la distancia viajada. Un recorrido de 20 kilómetros cuesta L. 40.00; mientras que un recorrido de 60 kilómetros cuesta L. 75.00. Determinar la ecuación de costo lineal. Graficar.

2.14) El costo total de producir y vender 100 artículos es de L. 8,780 cuando se producen 100 unidades. Si el costo variable unitario es de L. 85 ¿A cuanto ascienden los costos fijos? ¿Cuál es la función de costo total?

2.15) Juan compro un automóvil por 10,000 dolares. ¿Cuál es el valor del automóvil después de "t" años suponiendo que se deprecia linealmente cada año a una tasa del 12 % de su costo original? ¿Cuál es el valor del automóvil después de 5 años?

2.16) Una empresa compró maquinaria nueva por 15,000 dolares si se deprecia linealmente en 750 dolares al año y si tiene un valor de desecho de 2,250 dólares. ¿Por cuánto tiempo estará la maquinaria en uso? ¿Cuál será el valor de la maquinaria después de "t" años? ¿Cuanto después de 6 años?

2.17) La señora Martínez compró un plasma por 800 dolares que se deprecia linealmente cada año un 15 % de su costo original ¿Cuál es el valor del televisor después de "t" años? ¿Después de 5 años?

2.18) Una compañía compró una computadora por L. 20,000.00 y supuso que su valor de rescate es de L. 2,000.00 después de 10 años. Suponiendo que se deprecia linealmente. Encontrar:
a.) La ecuación que relaciona el valor de la computadora después de "t" años.
b.) Los valores de la computadora después de 4 y 8 años.
c.) La depreciación por año.
d.) Graficar para $0 < t < 10$

2.19) Las ecuaciones de oferta y demanda para cierto articulo están dadas por: $p = \frac{4}{5}x + 10; \quad 5p + 2x = 200$
Determinar el precio y la cantidad de equilibrio de mercado.

2.20) Si la ley de demanda de un bien dice que $2p+3x = 36$, y la ley de oferta establece que $2p = x + 12$. Determinar:
a.) El precio y la cantidad de equilibrio de mercado.
b.) Graficar ambas curvas.

2.21) Las ecuaciones de oferta y demanda de un artículo están dadas por: $p = 5.5 + 0.002x$ y por: $p = 22 - 0.001x$. Encontrar la cantidad y el precio de equilibrio de mercado.

2.22) Un comerciante puede vender diariamente 200 unidades de cierto bien en L.30 por unidad y 250 unidades en L.27 por unidad. La ecuación de oferta para este bien es $6p = x + 48$. Determine la ecuación de demanda para el bien, así como el precio y cantidad de equilibrio.

2.23) Determine la cantidad y precio de equilibrio de mercado para: $2p + 3x = 100$ y $p = \frac{1}{10}x + 2$

2.24) Determine la cantidad y precio de equilibrio de mercado para: $4p + x = 50$ y $6p - 5x = 10$

2.25) El costo total diario de producir x sillas está dado por $C(x) = 2.5x + 300$. Si cada silla se puede vender a 4 dolares. Determinar:

a.) El punto de equilibrio de la empresa.

b.) Si se sabe que al menos 150 sillas pueden venderse al día ¿Qué precio deberá fijarse para garantizar que no haya perdida?

2.26) El costo variable de producir cierto artículo es de 90 ctvs. por unidad y los costos fijos son de L. 240 al día. Si el artículo se vende a L. 1.20 cada uno ¿Cuántos artículos se deberán producir y vender para garantizar que no haya perdida?

2.27) Los costos fijos por producir cierto artículo son de L. 5,000.00 al mes y los costos variables son de L. 3.50 por unidad. Si el producto se puede vender a L. 6.00 por unidad determinar:

a.) El punto de equilibrio.

b.) El número de unidades que deben producirse y venderse al mes para obtener una utilidad de L. 1,000.00 mensuales.

c.) ¿Qué sucede si se venden 1,500 unidades?

2.28) El costo de producir x artículos está dado por $C(x) = 2.8x + 600$ y cada artículo se vende a L. 4.00. Determinar:

a.) El punto de equilibrio.

b.) Si se sabe que al menos 450 artículos se venderán ¿Cuál deberá ser el precio fijado a cada artículo para garantizar que no haya perdida?

2.29) Un fabricante produce un artículo a un costo variable de 85 ctvs. Y los costos fijos son de L. 280.00 al día si cada artículo se puede vender a L. 1.10. Determinar el punto de equilibrio y graficar.

2.30) El costo de producir x artículos a la semana está dado por $C(x) = 1000 + 5x$ y cada artículo puede venderse a L. 7.00. Determinar el punto de equilibrio. Si el fabricante puede reducir los costos variables a L. 4.00 por unidad e incrementar los costos fijos a L. 1,200 ¿Le convendría hacer esto?

3. Para cada par de ecuaciones de oferta y demanda hallar el precio y la cantidad de equilibrio de mercado y *graficar*. Siendo p el precio y x la cantidad.

3.1) $x = 84 - p^2 \quad ; \quad x = 2p + 4$

3.2) $p = 60 - 2x^2 \quad ; \quad p = 4 + 2x + x^2$

3.3) $x = 2p^2 - 2p - 6 \quad ; \quad x = -p^2 - p + 18$

3.4) $p = -4x^2 - x + 50 \quad ; \quad 6p - 5x = 60$

3.5) $3p + 5x^2 = 120 \quad ; \quad 7p - 3x = 56$

3.6) $20p^2 + 8x = 160 \quad ; \quad 6p - 4x = 320$

3.7) $(x + 10)(p + 20) = 300 \quad ; \quad x = 2p - 8$

3.8) $(5x + 10)(p + 5) = 500 \quad ; \quad 6p - 5x = 10$

3.9) $p^2 + x^2 = 25 \quad ; \quad p = x + 1$

3.10) $p^2 + 2x^2 = 114 \quad ; \quad p = x + 3$

3.11) $p = 6 + \frac{x^2}{4} \quad ; \quad x = \sqrt{36 - p}$

3.12) $p = 20 - \frac{x^2}{8} \quad ; \quad p = \sqrt{36 + x}$

4. Para los siguientes problemas, determinar el punto de equilibrio de mercado y *graficar*.

4.1) El costo diario de producir x artículos está dado por: $C(x) = 80 + 4x + 0.1x^2$ Si cada artículo puede venderse a L. 10.00. Determinar el punto de equilibrio y graficar.

4.2) El costo de producir x artículos al mes por una empresa está dado por: $C(x) = 2000 + 100\sqrt{x}$ Si cada artículo se puede vender a L. 10.00. Hallar el punto de equilibrio.

4.3) Las cantidades demandas para los bienes producidos por una industria están dadas por la ecuación: $p^2 + x^2 = 169$ y la oferta esta dada por: $p = x + 7$. Encontrar el precio y la cantidad de equilibrio de mercado y graficar.

4.4) Las ecuaciones de oferta y demanda para un articulo x son: $x = 3p^2 - 3p - 2$ y $x = 10 - p^2 - p$. Determinar el punto de equilibrio de mercado.

4.5) Una compañía produce (x, y) cantidades de acero diferentes, utilizando los mismos recursos. La curva de transformación de producto es: $y = 20 - \frac{300}{30-x}$ para $x < 30$; determinar:

a.) Las mayores cantidades de acero (x, y) que la compañía puede producir.

b.) Trazar la curva.

c.) Si la demanda de acero de tipo x es el doble que la del tipo y que cantidades debe producir la compañía.

4.6) Una compañía produce dos tipos de dulces a partir de los mismos recursos; si x, y representan las cantidades producidas. La curva de transformación de producto es: $(x - 24)(y - 36) = 240$ para $x < 24$, determinar:

a.) Las mayores cantidades de cada tipo de dulce (x, y) que la compañía puede producir.

b.) Trazar la curva.

c.) Si la demanda de dulce del tipo x es $\frac{2}{3}$ de la del tipo y que cantidades debe producir la compañía.

4.7) Una empresa manufactura dos tipos de papel partiendo de la misma materia prima; si (x, y) representan las cantidades producidas la curva de transformación de producto es: $x = 30 + \frac{150}{y-15}$ para $y < 15$; determinar:

a.) Las mayores cantidades de papel tipo x, tipo y que la empresa puede producir.

b.) Trazar la curva.

c.) Si la demanda de papel tipo x es tres veces la de y determinar las cantidades de papel que la empresa debe producir.

4.8) Una empresa fabrica dos tipos de llantas partiendo de la misma fuente. Si (x, y) representan las cantidades de los dos tipos de llantas la curva de transformación de producto es: $y = 50 + 5x - x^2$ Determinar:

a.) Las mayores cantidades de llantas que la empresa puede fabricar.

b.) Trazar la curva.

c.) Si la demanda de llanta tipo y es 10 mas que el doble del tipo x, hallar las cantidades que debe fabricar la empresa.

5. Para cada ecuación obtener la Razón Promedio de Cambio de y para cada cambio dado en x $\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)$

    5.1) $y = 30 - \frac{4}{5}x$ cuando x cambia de 10 a 20

    5.2) $y = 24 + 3x$ cuando x cambia de 5 a 15

    5.3) $y = 3x^2 + 7x + 4$ cuando x cambia de 12 a 18

    5.4) $y = 10x - 0.02x^2$ cuando x cambia de 50 a 90

    5.5) $y = 300 - 20x - 0.4x^2$ cuando x cambia de 90 a 150

    5.6) Una compañía de dulces ha determinado que el costo total diario para producir x cajas de bombones como: $C(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 2$ Hallar:

    a.) La razón promedio del costo respecto al número de cajas producidas de x a $x_1 + \Delta x$

    b.) La razón promedio del costo cuando la producción cambia de 40 a 60 cajas

    5.7) La ecuación de demanda de cierto articulo está dada por: $2p{+}0.6x = 20$ Encontrar:

    a.) La razón promedio de cambio de la cantidad demandada respecto al precio cuando este cambia de p a $p_1 + \Delta p$

    b.) Cual es la razón promedio de cambio de la demanda cuando el precio cambia de 5 a 10 Lempiras.

    5.8) El ingreso total por vender un artículo está dado por $I(x) = 6x - 0.02x^2$ Hallar:

    a.) La razón promedio del ingreso respecto al número de artículos vendidos de x a $x_1 + \Delta x$

    b.) La razón promedio del ingreso cuando la cantidad vendida cambia de 70 a 120 unidades.

    5.9) La función de demanda de un artículo está dada por: $p + 0.03x = 10$ Donde p es el precio y x la cantidad demandada. Determinar:

    a.) La razón promedio del ingreso respecto a un cambio en la cantidad vendida de x a $x_1 + \Delta x$

    b.) La razón promedio del cambio en el ingreso cuando la cantidad vendida cambia de 70 a 100 unidades.

    5.10) La utilidad de una empresa, por la venta de x unidades de cierto articulo esta dada por la ecuación $U(x) = 400 + 7x - 0.04x^2$ Determinar:

    a.) La razón promedio de la utilidad cuando la cantidad vendida cambia de x a $x_1 + \Delta x$

    b.) La razón promedio de cambio de la utilidad cuando x cambia de 50 a 70

    c.) La razón promedio de cambio de la utilidad cuando x cambio de 70 a 100

    d.) La razón promedio de cambio de la utilidad cuando x cambia de 90 a 120

6. Obtener la $\dfrac{dy}{dx}$ de cada función

6.1) $y = 5x - 0.002x^2$

6.2) $y = 4x^2 + 5x + 2$

6.3) $y = 200 - 4x - 0.01x^2$

6.4) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x + 2$

6.5) $y = x^3 \ln x^2$

6.6) $y = \frac{\ln x^2}{x^3}$

6.7) $x = \sqrt{3 - 7y}$

6.8) $3xy - 5x^2 + y^2 = 4$

6.9) $x = \frac{y+x}{y-x}$

6.10) $y = 5x + 10 + \frac{100}{x}$

7. Resolver los siguientes problemas.

7.1) La función de costo promedio de una empresa para la elaboración de x artículos, esta dada por: $C(x) = 4x + 7 + \frac{144}{x}$ Hallar:

a.) El costo promedio mínimo.

b.) El costo marginal.

7.2) La función de costo total para una empresa esta dada por la ecuación: $C(x) = 300x - 10x^2 + \frac{1}{3}x^3$ Obtener la producción x en la cual:

a.) El costo marginal es mínimo.

b.) El costo promedio es mínimo.

7.3) El costo en Lempiras de producir x artículos de cierto producto es: $C(x) = 4000 + 3x + 10^{-3}x^2$ Determinar:

a.) El número de unidades que minimizan el costo promedio.

b.) El costo promedio mínimo.

7.4) Un fabricante determina que el costo total de producir x producto esta dado por: $C(x) = 0.05x^2 + 5x + 500$ Hallar:

a.) El costo marginal cuando se producen 100 unidades.

b.) El costo real al producir la 101 unidad.

7.5) El costo total al producir un bien x de una empresa esta dado por: $C(x) = 40 + 10x + 0.02x^2$ Determinar:

a.) La función de costo marginal.

b.) El costo marginal cuando se producen 50 unidades.

c.) El costo real cuando se produce la unidad 51.

7.6) La función de demanda para el producto de un fabricante es $p = 1200 - 3x$ donde p es el precio y x es la cantidad. Obtener:

a.) La función de ingreso total.

b.) El número de unidades que maximizan el ingreso.

c.) El ingreso máximo.

7.7) El ingreso recibido por la venta de x lámparas eléctricas esta dado por: $I(x) = 200x - \frac{1}{3}x^2$ Determinar:

a.) La función de ingreso marginal.

b.) El ingreso marginal cuando se venden 30 lámparas.

c.) El ingreso real al vender la lámpara 31.

7.8) El ingreso mensual por la venta de cierto articulo está dado por: $I(x) = 20x - 0.04x^2$ Determinar:

a.) El ingreso marginal al vender 50 unidades.

b.) El ingreso real al vender la unidad 51.

7.9) Una empresa tiene ingreso por la venta de x artículos según la ecuación: $I(x) = 12x - 0.01x^2$ Determinar:

a.) El número de unidades que deben venderse para maximizar el ingreso.

b.) El ingreso máximo.

7.10) La utilidad obtenida por fabricar y vender x unidades de un producto esta dada por: $U(x) = 60x - x^2$ Determinar:

a.) El número de unidades que maximizan la utilidad.

b.) La utilidad máxima.

7.11) Un fabricante puede producir cuanto mucho 120 unidades de cierto articulo cada año. La ecuación de demanda para este producto es: $p = x^2 - 100x + 3200$ y la función de costo promedio es: $C(x) = \frac{2}{3}x^2 - 40x + \frac{10000}{x}$ Determinar la producción x que maximiza la utilidad y la utilidad máxima.

7.12) Para el producto de un monopolista la ecuación de demanda de su producto es: $p = 42 - 4x$ y la función de costo promedio es: $C(x) = 2 + \frac{80}{x}$ ¿A qué precio se maximiza la utilidad?

7.13) Una empresa tiene costos fijos de 2,000 Lempiras mensuales y costos variables de 25 Lempiras por unidad. Determinar:

a.) La función de costo total.

b.) Si el ingreso obtenido por la venta de x unidades esta dado por: $I(x) = 60x - 0.01x^2$ determinar el numero de unidades que deben producirse y venderse al mes para maximizar la utilidad y obtenga la utilidad máxima.

7.14) Una empresa vende todas las unidades que produce a 4 Lempiras cada una el costo de la empresa por producir x unidades es: $C(x) = 50 + 1.3x + 0.001x^2$ Obtener:

a.) La función de utilidad.

b.) El número de unidades producidas para maximizar la utilidad.

c.) La utilidad máxima.

7.15) La producción de naranjas de cada árbol en un huerto es $(500 - 5x)$ kilos donde x es la densidad en que se plantan los arboles (dada en arboles por manzana). Determinar el valor de x que haga que la producción total por manzana sea máxima y la producción máxima.

7.16) La función de costo de un fabricante de cierto artículo es: $C(x) = 1000+5x+0.1x^2$ cuando se producen x artículos por día. Si a lo más 80 artículos pueden producirse por día determinar el número de artículos que deben producirse para tener el costo promedio más bajo y el costo promedio mínimo.

7.17) La demanda x para cierto producto está dada por: $x = 4000 - 200p$ y el costo para producir dicho producto está dado por: $C(x) = 10x + 3000$ ¿A qué precio se debe vender el producto para tener la máxima utilidad? ¿Cuál es la utilidad máxima?

7.18) La demanda mensual x de cierto articulo al precio p en Lempiras, esta dada por: $x = 1350 - 45p$ El costo de mano de obra y material es de 5 Lempiras por unidad y costos generales de 2,000 Lempiras al mes ¿Qué precio por unidad debería fijarse para obtener una utilidad máxima mensual? ¿Cuál es la utilidad máxima?

7.19) Un granjero tiene 80 pies de maya para construir una cerca rectangular adyacente a su casa de modo que por un lado de la cerca no necesita maya. Hallar las dimensiones del terreno para cercar la máxima área. ¿Cuál es el área máxima?

7.20) Una persona tiene 120 pies de maya de alambre para construir 2 corrales rectangulares idénticos con un lado en común. Si x representa el ancho del corral, encontrar:

- a.) Las dimensiones de los corrales que hacen que el área total encerrada sea máxima.
- b.) El área máxima cercada.

7.21) Dada la siguiente función de producción: $Q = 10 + 15L + 25L^2 - 2.5L^3$
Donde Q = unidades de producto mensual y L = unidades de mano de obra en horas.

- a.) Encontrar las funciones de producto marginal y producto promedio.
- b.) Determinar el nivel de mano de obra que maximiza el nivel de producción.

7.22) La siguiente función de producción, nos relaciona mano de obra con unidades producidas mensualmente: $Q = 500L - L^2$

- a.) Encontrar las funciones de producto promedio y marginal.
- b.) ¿A que nivel de mano de obra es cero el producto marginal?
- c.) ¿Cuál es el nivel máximo de producción?

7.23) Si una empresa presenta la siguiente función de costos:
$C(x) = 300 + 5q - q^2 + 0.007q^3$
Donde Q = unidades de X producto al mes y C(x) esta dado en Lempiras.

- a.) ¿A cuanto asciende el costo fijo? ¿Cual es costo variable? ¿Cual es la función de costo promedio? ¿Cuál es la función de costo marginal?
- b.) ¿Cuales son las funciones de costo fijo promedio y de costo variable promedio?
- c.) Si la empresa produce 150 artículos, a cuanto asciende: el costo fijo, el costo variable, el costo fijo promedio, el costo variable promedio y el costo total.

7.24) Sabemos los siguientes datos de una empresa:
El costo fijo es de 20,000
El costo variable promedio es: $3.5 - 1.5Q + 0.05Q^2$

a.) ¿Cuál es la función de costos totales para esta empresa?
b.) ¿Cuál es el costo promedio?
c.) ¿Cuál es la función de costos marginales?

7.25) Asumiendo un mercado de competencia perfecta, en base a los siguientes datos calcule el volumen que maximiza el ingreso de una empresa.
$C(x) = 150 - 0.1q^2 + 0.0008q^3$
Cuando:

a.) Precio $= 5$
b.) Precio $= 10$

8. Resolver los siguientes problemas de tasas relacionadas.

8.1) Sea $I(x) = 60x - 0.03x^2$ Hallar: $\dfrac{dI}{dt}$ si $x = 50$; $\dfrac{dx}{dt} = 4$

8.2) Sea $C(x) = 40 + 3x - 0.02x^2$ Hallar: $\dfrac{dC}{dt}$ si $x = 38$; $\dfrac{dx}{dt} = 0.5$

8.3) Una empresa tiene la función de costo: $C(x) = 25 + 2x - \frac{1}{20}x^2$ cuando produce x unidades de su producto. Si este es igual a 5 unidades actualmente y esta creciendo a una tasa de 0.7 por año. Calcular la tasa en que los costos se están elevando.

8.4) La función de costo de un fabricante es: $C(x) = 2000 + 10x - 0.1x^2 + 0.002x^3$ Si el nivel de producción actual es $x = 100$ y está creciendo a una tasa de 2 al mes. Obtener:

a.) La tasa en que los costos de producción están creciendo.
b.) Si el ingreso del fabricante está dado por $I(x) = 65x - 0.05x^2$ Determinar la tasa en que está creciendo el ingreso.
c.) La tasa en que está creciendo la Utilidad.

8.5) La ecuación de demanda del producto de una compañía es $2p + x = 300$ en donde x unidades pueden venderse a un precio de p Lempiras cada una. Si la demanda cambia a una tasa de 2 unidades por año cuando la demanda alcanza 40 unidades, determinar:

a.) ¿A que tasa está cambiando el ingreso?
b.) Si los costos de la compañía son: $C(x) = 225 + 60x$ determinar la tasa en la que crece la utilidad.

8.6) La ecuación de oferta para cierta mercancía es: $x = 1000\sqrt{3p^2 + 20p}$ donde cada mes se suministran x unidades cuando p Lempiras es el precio por unidad. Determinar la tasa de variación de la oferta si el precio actual es de 20 Lempiras por unidad y el precio crece a una tasa de 0.50 Lempiras por mes.

8.7) La ecuación de demanda para cierto tipo de camiseta es: $2px + 65p - 4\,950 = 0$ donde x cientos de camisetas son demandas por semana cuando p Lempiras es el precio por camiseta. Si una camiseta se vende por 30 Lempiras esta semana y el precio crece a una tasa de 20 centavos por semana calcular la tasa de variación de la demanda.

8.8) Esta semana en una fábrica se produjeron 50 unidades de un artículo y la cantidad producida aumenta a una tasa de 2 unidades por semana. Si el costo total en Lempiras por producir x unidades es: $C(x) = 0.08x^3 - x^2 + 10x + 48$ Determinar la tasa actual a la que el costo de producción crece.

8.9) La demanda de cierto cereal para el desayuno está dado por la ecuación: $px + 50p = 16\,000$ donde "x" miles de cajas de cereal son demandadas a un precio de p dólares cada caja. Si el precio actual de la caja de cereal es 1.60 dólares y este se incrementa a una tasa de 0.40 dólares cada semana calcular la tasa de variación de la demanda.

8.10) En cierto mercado x miles de canastillas de manzanas se surten diariamente cuando p dólares es el precio por canastilla. La ecuación de oferta es $px - 20p - 3x + 105 = 0$ si el suministro diario decrece a una tasa de 250 canastillas ¿A qué tasa está variando el precio cuando la oferta diaria es de 5 000 canastillas?

9. Para cada función obtener las derivadas parciales. D_x, D_y, D_z

9.1) $f(x, y, z) = x^2y - 3xy^2 + 2yz$

9.2) $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$

9.3) $f(x, y) = 6x + 3y - 7$

9.4) $f(x, y, z) = 3x - 5xy^2 + 2xz - 4yz - 7z$

9.5) $f(x, y) = 4x^2 - 3xy$

9.6) $f(x, y) = 3xy + 6x - y^2$

9.7) $f(x, y) = xy^2 - 5y + 6$

9.8) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3xz + 5yz - 10z$

10. Para cada función de producción $P(L, K)$ determinar las productividades marginales para los valores dados.

10.1) $P(L, K) = 7L + 5K + 2LK - L^2 - 2K^2 \quad ; \quad L = 3; K = 10$

10.2) $P(L, K) = 50L + 3L^2 - 4L^3 + 2LK^2 - 3L^2K - 2K^3 \quad ; \quad L = 2; K = 5$

10.3) $P(L, K) = 18L - 5L^2 + 3LK + 7K - K^2 \quad ; \quad L = 4; K = 8$

10.4) $P(L, K) = 25L + 2L^2 - 3L^3 + 5LK^2 - 7L^2K - K^3 \quad ; \quad L = 3; K = 10$

10.5) $P(L, K) = 100L^{0.3}K^{0.7} \quad ; \quad L = 6; K = 8$

11. Hallar los extremos locales de cada ecuación.

11.1) $f(x, y) = 2xy - x^2 - 3y^2 - x - 3y$

11.2) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 7$

11.3) $f(x,y) = 2x^2 - 3y^2 + 4x + 12y$

11.4) $f(x,y) = 5 + 4x + 6y - x^2 - 3y^2$

11.5) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2x - 2y + 1$

12. Hallar los extremos locales de cada ecuación sujeta a la restricción dada.

12.1) $f(x,y) = xy \quad ; \quad x + y = 10$

12.2) $f(x,y) = 2x + 2xy + y \quad ; \quad 2x + y = 100$

12.3) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3xy \quad ; \quad 2x + 3y = 31$

12.4) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad ; \quad 2x + 3y + 4z = 29$

13. Resolver los problemas

13.1) Se deduce que la utilidad por acre de cierto cultivo de trigo esta dado por: $P = 40L + 5S + 20F - 3L^2 - S^2 - 2F^2 - 4SF$ donde L es el costo de mano de obra, S el costo de la semilla y F el costo del fertilizante. Calcular: $P_L; P_S; P_F$ Evaluar cuando $L = 10; S = 3; F = 4$ e interprete los resultados.

13.2) El costo de producir x modelos regulares y y modelos de lujo del producto de una empresa está dado por la ecuación $C(x,y) = x^2 + 1.5y^2 + 300$ ¿Cuantas unidades de cada tipo deben producirse para minimizar los costos totales? Sí la empresa decide producir 200 unidades.

13.3) Una empresa puede elaborar su producto en dos de sus plantas, el costo de producir x unidades en su primera planta y y unidades en su segunda planta esta dado por la ecuación conjunta de costo: $C(x,y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$ Sí La empresa tiene una orden de suministrar 500 unidades. ¿Cuántas unidades debe producir en cada planta con el objeto de minimizar el costo total?

13.4) Una empresa produce dos tipos de productos A y B. el costo diario total en Lempiras de producir x unidades de A, y unidades de B está dado por: $C(x,y) = 250 - 4x - 7y + 0.2x^2 + 0.1y^2$ Determinar el numero de unidades de A y B que la empresa debe producir al día para minimizar el costo total. Sí la empresa puede vender cada unidad de A a 20 Lempiras. Y cada unidad de B a 16 Lempiras; hallar los niveles de producción de A y B que maximizan la utilidad y calcular la utilidad máxima.

13.5) Usando L unidades de mano de obra y K unidades de capital, la producción semanal total de una empresa está dada por: $P(L,K) = 20K + 32L + 3LK - 2L^2 - 2.5K^2$ Determinar el número de unidades de mano de obra y capital que la empresa debe utilizar para maximizar su producción.

13.6) El costo total C por serie de producción en miles de Lempiras de cierta industria esta dado por: $C(x,y) = 3^x2 + 4y^2 - 5xy + 3x - 14y + 20$ en donde x denota el numero de horas-hombre (en cientos) y y el número de unidades (en miles) del producto elaborado por serie ¿Qué valores de x, y darán como resultado el costo total mínimo por serie de producción.

4.2. Segunda Unidad.

1. Sean los vectores:

   $$\mathbf{a} = (20, 50, 70, 15),\ b = (12, 18, 6, 15),\ u = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   Efectuar:

   1.1) $a + b$

   1.2) $u + w$

   1.3) $u + b$

   1.4) $a \cdot b$

   1.5) $u \cdot w$

   1.6) $u \cdot b$

   1.7) $a + w$

   1.8) $b \cdot w$

   1.9) $2u + 3w$

   1.10) $3a \cdot 5u$

2. Resolver los siguientes problemas:

   2.1) Un fabricante produce cuatro artículos. La demanda para los artículos esta dada por el vector $x = (30, 20, 40, 35)$ Los precios unitarios para los artículos están dados por el vector: $y = (7, 4, 6, 8)$ Sí el fabricante satisface su demanda ¿Cuánto dinero recibirá?

   2.2) Una compañía agroindustrial fabrica tres productos para cocina: aceite, manteca y margarina en dos fábricas. Una en Colon y otra en Atlántida. Sí en la fábrica de Colon produce 400 kg de aceite, 200 kg de margarina y 500 kg de manteca por semana y en la fábrica de Atlántida produce 700 kg de aceite, 300 kg de margarina y 100 kg de manteca por semana, se pide:

   a.) Ordenar la producción de cada fabrica como un vector columna.

   b.) Expresar la cantidad total producida por la compañía como un vector.

   c.) ¿Cuanta cantidad de cada producto produce la compañía en cuatro semanas?

   2.3) Un fabricante de zapatos tiene pedidos para 70 pares de zapatos de caballero, 120 pares de zapatos de dama y 80 pares de zapatos de niño. Si los costos para producir un par de zapatos de dama es 24 Lempiras, para un par de zapatos de niño es 15 Lempiras y para producir un par de zapatos de caballero es 30 Lempiras. Se pide:

   a.) Ordenar la producción con un vector renglón.

   b.) Ordenar los costos de producción con un vector columna.

c.) ¿Cuál es el costo total del fabricante?

2.4) Una finca agrícola desea producir frijoles, se sabe que se requieren 80 horas-hombre para preparar la tierra y 100 horas-hombre para la siembra. Si la hora hombre para preparar la tierra le cuesta 17 Lempiras y para la siembra le cuesta 24 Lempiras. Represente el costo como un vector renglón y las horas–hombre como un vector columna para luego obtener el costo total en este proceso de producción.

3. Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 8 \\ 4 & 9 & 5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 10 & 8 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 7 \\ 6 & 10 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 10 & 20 & 40 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Efectuar:

3.1) $B + D$

3.2) $A + C^t$

3.3) $D^t - B$

3.4) $A + D$

3.5) $A - C^t$

3.6) $A \times B$

3.7) $B \times 0.4D$

3.8) $2B + 5D$

3.9) $C^t \times D$

3.10) $2B \times C$

4. Resolver los siguientes ejercicios:

4.1) Una compañía tiene plantas en tres localidades X, Y, Z y cuatro bodegas en los lugares A, B, CyD. El costo en Lempiras de transportar una unidad de su producto de una planta a una bodega esta dado por la siguiente matriz.

$$\begin{array}{cc} \text{A} & \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \leftarrow \text{Desde} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} 10 & 12 & 15 \\ 13 & 10 & 12 \\ 8 & 15 & 6 \\ 16 & 9 & 10 \end{bmatrix} \end{array}$$

a.) Si los costos de transporte se incrementan uniformemente en dos Lempiras por unidad ¿Cuál es la nueva matriz?

b.) Si los costos de transporte se elevan en un 20 % escriba los nuevos costos en forma matricial.

4.2) Un contratista calcula que los costos en Lempiras de adquirir y transportar unidades determinadas de concreto, madera y acero desde tres diferentes localidades A, B y C. Están dadas por las siguientes matrices:

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} C & M & A \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 20 & 35 & 25 \\ 8 & 10 & 6 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \textit{costo material} \\ \textit{costo de transporte} \end{array} \end{array}$$

$$B = \begin{bmatrix} 26 & 36 & 24 \\ 9 & 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \textit{costo material} \\ \textit{costo de transporte} \end{array}$$

$$C = \begin{bmatrix} 18 & 32 & 26 \\ 11 & 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \textit{costo material} \\ \textit{costo de transporte} \end{array}$$

Escribir la matriz que representa los costos totales de material y transportación (según el material) desde cada una de las tres localidades.

4.3) Una empresa produce tres tamaños de papel en dos calidades diferentes la producción en miles en su planta de San Pedro Sula está dada por la matriz:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} T_1 & T_2 & T_3 \end{array} \\ \begin{array}{r} \textit{calidad } 1 \\ \textit{calidad } 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 27 & 36 & 30 \\ 18 & 26 & 21 \end{bmatrix} \end{array}$$

En tanto que la producción en miles en su planta de Tegucigalpa es:

$$\begin{array}{r c} \begin{array}{r} \textit{calidad } 1 \\ \textit{calidad } 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 32 & 40 & 35 \\ 25 & 38 & 30 \end{bmatrix} \end{array}$$

a.) Escriba una matriz que represente la producción total de papel por tamaño en ambas plantas.

b.) Los dueños de la empresa planean abrir una tercera planta en Comayagua la cual tendría una capacidad de producción de un 30 % mas que la planta en Tegucigalpa con la misma calidad. Escriba la matriz que representa la producción en Comayagua.

c.) ¿Cuál será la producción total en las tres plantas?

4.4) Un fabricante de zapatos los produce en colores negro, blanco y café para niños, damas y caballeros. La capacidad de producción (en miles de pares) en la planta de San Pedro Sula está dada por la matriz:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} T_1 & T_2 & T_3 \end{array} \\ \begin{array}{r} negro \\ cafe \\ blanco \end{array} & \begin{bmatrix} 30 & 34 & 20 \\ 45 & 20 & 16 \\ 14 & 26 & 25 \end{bmatrix} \end{array}$$

La producción en la planta de Tegucigalpa esta dada por la matriz:

$$\begin{array}{r c} \begin{array}{r} negro \\ cafe \\ blanco \end{array} & \begin{bmatrix} 35 & 30 & 26 \\ 52 & 25 & 18 \\ 23 & 24 & 32 \end{bmatrix} \end{array}$$

a.) Determinar la representación matricial de la producción total por cada tipo de zapatos en ambas plantas.

b.) Si la producción en San Pedro Sula se incrementa en un 50 % y en Tegucigalpa en un 25 % hallar la matriz que representa la producción total para cada tipo de zapato.

4.5) Carolina lleva el control del número de libros de español y matemáticas en un pequeño inventario. El inventario al inicio de febrero se describe en la matriz:

$$\begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 900 & 1000 & 750 \\ 550 & 950 & 700 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \textit{español} \\ \textit{matemáticas} \end{array} \end{array}$$

La primera columna se refiere a libros de séptimo, la segunda a octavo y la tercera a libros de noveno. Sí las ventas en ese mes fueron según la matriz:

$$\begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 600 & 800 & 500 \\ 550 & 950 & 600 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \textit{español} \\ \textit{matemáticas} \end{array} \end{array}$$

Escriba la matriz de inventario al final de febrero.

4.6) La fábrica de jugos EL GUSTAZO. Produce tres sabores de jugo: naranja, piña y uva; en dos tamaños diferentes (pequeño y grande). La producción mensual en cientos de jugos en su planta de Colon está dada por la matriz:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} N & P & U \end{array} \\ \begin{array}{r} \textit{pequeño} \\ \textit{grande} \end{array} & \begin{bmatrix} 70 & 60 & 70 \\ 80 & 60 & 90 \end{bmatrix} \end{array}$$

Mientras que la producción mensual (en cientos de jugos) en su planta de Cortes esta dada por la matriz:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} N & P & U \end{array} \\ \begin{array}{r} \textit{pequeño} \\ \textit{grande} \end{array} & \begin{bmatrix} 40 & 50 & 90 \\ 50 & 60 & 110 \end{bmatrix} \end{array}$$

a.) ¿Cuál es la producción total al mes en las dos plantas?

b.) Si la producción en la planta de Colon aumenta un 20 % y en la planta de Cortes la producción disminuye un 10 % ¿Cuál será ahora la producción total en las dos plantas?

4.7) Una empresa produce chocolates de dos tipos: amargo y dulce. Los empaca en tres tamaños distintos. La producción en miles de unidades en su planta en Costa Rica esta dada por la matriz:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} P & M & G \end{array} \\ \begin{array}{r} \textit{amargo} \\ \textit{dulce} \end{array} & \begin{bmatrix} 20 & 16 & 32 \\ 35 & 42 & 58 \end{bmatrix} \end{array}$$

Mientras que en su planta de Guatemala la producción en miles de unidades esta dada por la matriz:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} P & M & G \end{array} \\ \begin{array}{r} \textit{amargo} \\ \textit{dulce} \end{array} & \begin{bmatrix} 24 & 32 & 43 \\ 47 & 54 & 72 \end{bmatrix} \end{array}$$

a.) Escriba la matriz que representa la producción total en ambas plantas.

b.) La producción promedio en ambas plantas.

c.) Si la producción en la planta de Costa Rica aumenta un 20 % y la producción en la planta de Guatemala aumenta un 10 % ¿Cuál será la producción promedio en ambas plantas?

4.8) Daniela es la gerente de una compañía que vende cuatro modelos de impresoras en tres tiendas distintas; el inventario en la tienda i del modelo j está dado por el elemento C_{ij} de la matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 16 & 10 & 15 & 20 \\ 0 & 15 & 18 & 17 \\ 20 & 26 & 32 & 14 \end{bmatrix}$$

Los precios en dólares a los que compra y vende al público Daniela cada impresora de modelo i, esta representado por: P_{i1}, P_{i2} respectivamente en la matriz:

$$P = \begin{bmatrix} 170 & 239.99 \\ 225 & 289.99 \\ 375 & 519.99 \\ 585 & 729.99 \end{bmatrix}$$

a.) Determinar: CP

b.) ¿Qué representa CP?

4.9) Una empresa de renta de automóviles concentró en la siguiente tabla el número de rentas de sus tres tipos de automóviles durante los últimos 4 meses.

	Toyota	Kia	Nissan
Enero	50	65	40
Febrero	75	80	55
Marzo	60	50	45
Abril	70	75	40

Con la tabla anterior defina una matriz A de tamaño 3×4 que represente la información dada y si el vector $P = \begin{bmatrix} 100 & 120 & 150 \end{bmatrix}$ representa los precios de la renta de cada automóvil. Determine PA e interprete el significado de cada uno de sus elementos.

4.10) Dada la siguiente matriz A, encuentre una matriz B tal que $A+B$ sea una matriz con cada entrada igual a *on*.

$$A = \begin{bmatrix} on & on & off \\ off & on & off \\ off & on & on \end{bmatrix}$$

5. Hallar el determinante de cada matriz.

5.1) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

5.2) $\begin{bmatrix} -6 & -7 \\ -8 & -3 \end{bmatrix}$

5.3) $\begin{bmatrix} 32 & 2 \\ 64 & 5 \end{bmatrix}$

5.4) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5.5) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$

5.6) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

5.7) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

5.8) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

6. Encontrar la inversa de cada matriz por los métodos de Gauss-Jordan y por Determinantes.

6.1) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

6.2) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

6.3) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

6.4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

6.5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

6.6) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

6.7) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

6.8) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

7. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por los métodos de: Gauss-Jordan y Regla de Cramer.

7.1) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases}$

7.2) $\begin{cases} 4x - 14 = -5y \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$

7.3) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 7 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{5}y = 1 \end{cases}$

7.4) $\begin{cases} 2(x-y) = 5 \\ 4(1-y) = 3x \end{cases}$

7.5) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 4 \\ x + y + z = -1 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}$

7.6) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2y - z = 1 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

7.7) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 2x + 5y + 7z = 6 \\ 3x + 7y + 8z = 5 \end{cases}$

7.8) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ x + 3y - z = 5 \\ 6x - 3y + 9z = 10 \end{cases}$

7.9) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y + z = 3 \\ 2x + z = 7 \end{cases}$

7.10) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -3 \\ x + y + z = 2 \\ 3x + 2y - z = 8 \end{cases}$

8. Resolver los siguientes problemas (por cualquier método).

   8.1) La ecuación de demanda de cierto producto es: $p+2x = 25$ y la ecuación de oferta es $p - 3x = 5$ donde p es el precio y x la cantidad demandada o suministrada. ¿Calcular el precio y la cantidad de equilibrio de mercado?

   8.2) Las ecuaciones de demanda y de oferta de cierto articulo son: $3p + 5x = 200$ y $7p = 3x + 56$ respectivamente; determinar los valores de x y p que den el punto de equilibrio de mercado.

8.3) Una persona invierte un total de 20,000 Lempiras en tres fondos al 6, 8 y 10 % el ingreso total al año fue de 1,624 Lempiras. Sí el ingreso de la inversión al 10 % fue dos veces el ingreso de la inversión al 6 % ¿Cuánto dinero se invirtió en cada fondo?

8.4) Una empresa produce tres productos: A, B, y C. Los que procesa en tres maquinas. El tiempo en horas requerido para procesar una unidad de cada producto por las tres máquinas está dado por:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se dispone de la maquina 1 por 850 horas, de la maquina 2 por 1,200 horas de la maquina 3 por 550 horas ¿Cuántas unidades de cada producto deberán producirse con el objeto de emplear todo el tiempo disponible de las maquinas?

8.5) Un contratista dispone de 5,000 horas-hombre para tres proyectos; los costos por hora-hombre de los tres proyectos son de: 8, 10, y 12 Lempiras respectivamente y el costo total es de 53,000 Lempiras. Sí el número de horas-hombre para el tercer proyecto es igual a la suma de las horas-hombre requeridas para los dos primeros proyectos, calcular el número de horas-hombre de que se puede disponer en cada proyecto.

8.6) Un agricultor desea comprar 14 Kg de granos para la siembra entre sorgo, maíz y frijoles con 100 Lempiras. El sorgo cuesta 9 Lempiras el Kg, el maíz cuesta 5 Lempiras el Kg y el frijol cuesta 12 Lempiras el Kg ¿Cuántos Kg de cada grano puede comprar para usar de manera exacta su dinero?

8.7) Un ebanista fabrica sillas, mesas y escritorios de oficina. Se necesitan 10 minutos para lijar una silla, 6 minutos para pintarla y 12 minutos para barnizarla. Se requieren 12 minutos para lijar una mesa, 8 minutos para pintarla y 12 minutos para barnizarla y son necesarios 15 minutos para lijar un escritorio, 12 minutos para pintarlo y 18 minutos para barnizarlo. Sí el centro de lijado está disponible 16 horas por semana, el centro de pintura está disponible 11 horas por semana y el centro de barnizado está disponible 18 horas por semana ¿Cuántas unidades de cada mueble deben fabricarse por semana de modo que los centros de trabajo se utilicen a toda su capacidad?

8.8) Un distribuidor de refrescos tiene un presupuesto de 300,000 dolares para comprar 12 camiones nuevos. Si un modelo A de camión cuesta 18,000 dolares y un modelo B cuesta 22,000 dolares y un modelo C cuesta 30,000 dolares ¿Cuantos camiones de cada modelo deberá comprar el distribuidor para usar de manera exacta su presupuesto?

8.9) Se invierte un total de 50,000 Lempiras en tres tipos de valores. Para los cuales se fijan dividendos iguales al 8 %, 10 % y 12 %. Sí el ingreso anual de los tres tipos de valores es de 5,320 Lempiras y el ingreso procedente del valor al 12 % es de 1,080 Lempiras mas que el valor al 10 %. ¿Calcular la cantidad invertida en cada valor?

8.10) Un inversionista tiene 12,000 Lempiras para invertir. Si invierte una parte al 8 % y el resto en una inversión de alto riesgo al 14 % ¿Cuánto dinero debe invertir en cada tipo de interés para obtener el mismo rendimiento que habría obtenido sí hubiera invertido todo al 10 %?

4.3. Tercer Unidad.

1. Calcular el termino indicado para la progresión aritmética.

   1.1) a_{30} con $a_1 = -30$ y $a_{10} = 69$

   1.2) a_{51} con $a_1 = 9$ y $a_8 = -19$

   1.3) El vigésimo tercer término de la progresión aritmética: $6, -4, ...$

   1.4) El trigésimo quinto término de la progresión aritmética: $-\frac{2}{3}, -\frac{1}{5}, ...$

   1.5) Si $a_5 = 19$ y $a_{11} = 43$ ¿Cuál es el termino a_{20}?

   1.6) Si los términos tercero y séptimo de una PA son 18 y 30, respectivamente, encuentre el décimo quinto término.

2. Para los ejercicios 2.1 a 2.8 calcular S_{100} y para las demas progresiones aritméticas, calcular lo que se les indique:

   2.1) $a_1 = 3$; $d = 3$

   2.2) $a_1 = -91$; $d = 21$

   2.3) $a_1 = \frac{1}{7}$; $d = 5$

   2.4) $a_1 = 725$; $d = 100$

   2.5) $a_1 = 1$; $d = 8$

   2.6) $a_1 = -7$; $d = -10$

   2.7) $a_1 = \frac{2}{5}$; $d = -4$

   2.8) $a_1 = 0.1$; $d = 10$

   2.9) Encontrar la suma de la siguiente PA: $5, 14, 23, 32, \ldots 239$

   2.10) Los términos quinto y décimo de una PA son 38 y 23. Encontrar la suma de los primeros 50 términos.

3. Introduzca las medias aritméticas pedidas entre los números dados.

   3.1) 6 medias aritméticas entre -8 y 48

   3.2) 7 medias aritméticas entre - 36 y 4

   3.3) 5 medias aritméticas entre 6 y 10

   3.4) 4 medias aritméticas entre 3 y 38

4. Resolver los siguientes ejercicios.

4.1) Una persona ahorra 10 Lempiras una semana y de ahí en adelante ahorra 50 centavos más que en la semana anterior. ¿Cuanto abra ahorrado al final de un año?

4.2) Suponga que un saco de 100 libras de grano tiene un pequeño agujero en el fondo; cada minuto se sale un $\frac{1}{3}$ de onza ¿Cuantas libras de grano quedan en el saco después de una hora? (Nota una libra tiene 16 onzas).

4.3) Suponga que el pequeño agujero en el saco del ejercicio anterior, cada vez se hace más grande; el primer minuto sale $\frac{1}{3}$ de onza y de ahí en adelante, en cada minuto siguiente se sale $\frac{1}{3}$ de onza más que durante el minuto anterior ¿Cuantas libras de grano quedan en el saco después de $\frac{1}{2}$ hora bajo estas nuevas circunstancias? (Nota una libra tiene 16 onzas).

4.4) Un préstamo de 12,000 Lempiras se paga en 12 abonos mensuales iguales durante la primera semana del mes siguiente. La tasa de interés es 2 % mensual sobre saldos insolutos.
a.) Calcular el pago mensual de interés en cada uno de los primeros 3 meses.
b.) Deduzca el termino general de las progresiones que expresan el saldo mensual.
c.) Calcular el interés total pagado en el año y la tasa anual de interés.

4.5) Un hombre salda un préstamo de 3,250 Lempiras pagando 20 Lempiras en el primer mes y después aumentando el pago en 15 Lempiras cada mes ¿Cuánto tiempo le tomará liquidar el préstamo?

4.6) María debe saldar una deuda de 1,800 Lempiras en un año efectuando un pago de 150 Lempiras al término de cada mes, más intereses a una tasa del 1 % mensual sobre el saldo insoluto. Determinar el pago total por concepto de intereses.

4.7) Una persona deposita 50 Lempiras al inicio de cada mes en una cuenta de ahorros en la cual el interés permitido es de $\frac{1}{2}$ % al mes sobre el balance mensual. Determinar el balance de la cuenta al termino del segundo año calculando a interés simple.

4.8) Un individuo está de acuerdo en saldar una deuda de 1,800 Lempiras en cierto numero de pagos, cada uno de ellos (empezando con el segundo) menor que el primero en 10 Lempiras. Sí su quinto pago es de 200 Lempiras. ¿Cuantos pagos serán necesarios para para saldar la deuda?

4.9) Un sujeto invirtió 200 Lempiras en un fondo de una cooperativa que paga un interés simple del 10 % al año. ¿Cuál es el valor de la inversión? a.) Después de n años. b.) Al cabo de 5 años.

4.10) Una compañía manufacturera instala una maquina a un costo de 1,500 dolares. Al cabo de 9 años la maquina tiene un valor de 420 dolares. Suponiendo que la depreciación anual es constante calcular la depreciación anual.

4.11) El costo de efectuar una perforación hasta 600 metros es como sigue: se fijan \$15 por el primer metro y el costo por metro se incrementa en \$2 por cada metro subsiguiente. Calcule el costo de perforar el metro número 500 y el costo total de perforar 500 metros.

4.12) ¿Cuántos términos de la sucesión $-12, -7, -2, 3, 8, \ldots$ deben sumarse de tal manera que la suma sea 105?

4.13) Usando el método de depreciación de la suma de los dígitos de los años calcular la depreciación durante cada año de una flotilla de automóviles cuyo precio de compra es 500,000 Lempiras y su precio de reventa después de 3 años será de 200,000 Lempiras.

5. Si cada sucesión es una progresión geométrica encontrar el termino especificado.

5.1) El termino 12 de $3, 6, 12, 24, \ldots$

5.2) El sexto termino de $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, 9, \ldots$

5.3) El décimo termino de $2, 4, 8, \ldots$

5.4) El decimocuarto termino de $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \ldots$

5.5) El decimo termino de una progresión cuyo tercer termino es: $\frac{9}{5}$ y octavo termino es: $\frac{2187}{15625}$

5.6) El onceavo termino de una progresión cuyo cuarto y séptimo termino son: $\frac{125}{9}$ y $\frac{15625}{243}$ respectivamente.

6. Calcular la suma indicada de las sucesiones.

6.1) $2, 6, 18, 54, \ldots$ 12 términos.

6.2) $\sqrt{3}, -3, 3\sqrt{3}, -9, \ldots$ 10 términos.

6.3) $1, 2, 4, 8, \ldots$ n términos.

6.4) $18, 12, 8, \ldots$ sumar 9 términos.

6.5) Sumar 12 términos de $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \ldots$

6.6) Sumar 12 términos de $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, 9, \ldots$

7. Resolver los siguientes ejercicios.

7.1) Suponga que alguien le ofrece un trabajo por el que va a ganar 1 centavo el primer día, 2 centavos el segundo día, 4 el tercero, etc. Es decir, cada día gana el doble de lo que ganó el día anterior ¿Cuánto ganara en 30 días en ese trabajo?

7.2) Suponga que lo que usted ahorra en determinado mes es el doble de lo que ahorro en el mes anterior ¿Cuánto habrá ahorrado al cabo de un año? Sí en el primer mes ahorro 1 Lempira.

7.3) Cierto cultivo bacteriano crece duplicando su cantidad cada día. Al finalizar el primer día hay 1,000 bacterias ¿Cuantas nacen el decimo día? ¿Cuantas habrá al cabo de 10 días? ¿Y después de de n días?

7.4) Suponga que un automóvil se deprecia el 10 % cada año, durante los primeros 5 años ¿Cuánto vale después de 5 años? Sí su precio original fue de 14,280 dolares.

7.5) Se invierten 200 Lempiras mensualmente al 11 % de interés.
a.) Cuanto se tiene después de n años. b.) Cuanto se tiene después de 5 años.

7.6) ¿Qué cantidad se debe invertir al 12 % de interés compuesto anualmente para que después de 3 años se tengan 1,000 Lempiras?

5. Respuestas de Ejercicios Propuestos. (Impares)

5.1. Primer Unidad.

1. En cada ecuación determinar si representa una curva de demanda, oferta o ninguna. Siendo p el precio y x la cantidad (es posible que deba manipular la ecuación para poder llegar a una conclusión).

   1.1) Oferta

   1.3) Ninguna

   1.5) Oferta

   1.7) Ninguna

2. Resolver los siguientes problemas. TODOS deben incluir graficas.

   2.1) $20\,000p + x - 34\,000 = 0$

   2.3) $900p + x - 4\,571 = 0; 1\,602$

   2.5) $600p - x - 4\,800 = 0$

   2.7) $2\,000p - x - 5\,000 = 0; 2.50$

   2.9) $C(x) = 5x + 200; cf = 200, cv = 5$

   2.11) $C(x) = 300 + 5.5x; 465$

   2.13) $V(t) = 10\,000 - 1\,200t; 4\,000$

   2.15) $V(t) = 800 - 120t; 200$

   2.17) $(25, 30)$

   2.19) $(5\,500, 16.5)$

   2.21) 800

   2.23) $(500, 2\,000); 4.45$

2.25) $(500, 3\,500)$; si

3. Para cada par de ecuaciones de oferta y demanda hallar el precio y la cantidad de equilibrio de mercado y graficar. Siendo p el precio y x la cantidad.

   3.1) $(20, 8)$

   3.3) $(28, 20)$

   3.5) $(2, 5)$

   3.7) $(25, 70)$

   3.9) $(\sqrt{24}, 11)$

4. Resolver los siguientes problemas.

   4.1) $(20, 200)$

   4.3) $(5, 12)$

   4.5) $x = 15; y = 10$ ó $x = 10; y = 5$

   4.7) $x = 20; y = 10$ ó $x = 15; y = 5$

5. Para cada ecuación obtener la Razón Promedio de Cambio de y para cada cambio dado en x $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

   5.1) $-\frac{4}{5}$

   5.3) 97

   5.5) -116

   5.7) $-\frac{10}{3}$

   5.9) $10 - 0.06x - 0.03\Delta x; 4.9$

6. Obtener la dy de cada función.

   6.1) $5 - 0.004x$

   6.3) $-4 - 0.02x$

   6.5) $x^2(2 + \ln x^6)$

   6.7) La respuesta original del manual es: $\frac{-2\sqrt{3-7y}}{7}$ Si me pide dy/dx a mi me sale: -2/7x. Pero si en vez de eso obtengo dx/dy me da: $\frac{-7}{2\sqrt{3-7y}}$ que racionalizando me da: $\frac{-7\sqrt{3-7y}}{6-14y}$

   6.9) La respuesta original del manual es: $\frac{2y-(y-x)^2}{2x}$

7. Ejercicios 7.